Hochschule Zittau/Görlitz
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Karlsruhe Institute of Technology

Universität Augsburg
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät

Melanie Reuter

Christian Gahm
Christian Nuss
Claudius Steinhardt
Michael Neugebauer

Georg Ringwelski

1. Aufgabe (Lineare Programme)

Implementieren Sie die folgenden linearen Programme mit Hilfe von OPL und lösen Sie sie mit CPLEX. Falls das Problem lösbar ist, soll die erhaltene Lösung angegeben werden.

a)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ s.t. \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \le 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ s.t. \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 120 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ s.t. \quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 18 \\ & -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 38 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ s.t. \quad & -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 15 \\ & -x_1 - 4x_2 - 1{,}5x_3 \le 2 \\ & -2x_1 + 2x_3 \le 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

2. Aufgabe (Ganzzahlige Programme)

Implementieren Sie die folgenden Optimierungsprobleme mit Hilfe von OPL und lösen Sie sie mit CPLEX.

a)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
s.t. \quad & x_1 + 3x_2 \le 7 \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
s.t. \quad & x_1 + 3x_2 \le 7 \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\
& \frac{3}{4}x_1 + x_2 \ge 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe (Lineares Programm / Modellierung)

Das Unternehmen WorldLight Company stellt unter anderem zwei verschiedene Arten von Lampen mit Metallgehäuse her. Dazu werden verschiedene Metallteile und elektronische Komponenten verwendet. Das Management will nun wissen, wie viele Lampen von jeder Sorte hergestellt werden müssen, damit der Gewinn maximiert wird.

Für jede Lampe von Typ 1 wird eine Einheit und für jede Lampe von Typ 2 werden drei Einheiten des Metallteils benötigt. Beide Lampen beinhalten zwei Einheiten der elektronischen Komponente. Weiterhin besitzt das Unternehmen 200 Einheiten der Metallteile und 300 Einheiten der elektronischen Komponenten.

Der Gewinn pro Lampe vom Typ 1 beträgt 1,00 € und der von einer Lampe vom Typ 2 2,00 €. Allerdings ist bekannt, dass von Typ 2 nicht mehr als 60 Exemplare verkauft werden können. Deshalb dürfen auch nicht mehr als 60 Lampen vom Typ 2 produziert werden.

a) Modellieren Sie das Problem als Optimierungsproblem: Identifizieren Sie Variablen, Domains, Constraints und Zielfunktion.
b) Verändern Sie ihr Modell nun so, dass es ein lineares Optimierungsproblem ist.
c) Implementieren Sie das lineare Programm mit Hilfe von OPL und lösen Sie es mit CPLEX. (optimale Lösung: 175)

4. Aufgabe (Ganzzahliges Programm / Modellierung)

Ein Warenhaus hat eine Werbeagentur damit beauftragt die einzusetzenden Werbemedien sowie die Anzahl der zu schaltenden Werbemittel zu bestimmen. Es gibt drei verschiedene Werbemedien: Fernsehen, Radio und Zeitung. Die Leitung ist an der optimalen Anzahl zu schaltender Spots bzw. Anzeigen für jedes Medium interessiert, so dass die Reichweite maximal wird. Es wird geschätzt, dass die Werbeaktivitäten die in folgender Tabelle wiedergegebenen Reichweiten und Kosten besitzen:

Werbemittel	Reichweite	Kosten
Fernsehspot	20 000 Menschen	€ 15 000
Radiospot	12 000 Menschen	€ 6 000
Zeitungsanzeige	9 000 Menschen	€ 4 000

Das Unternehmen muss folgende Bedingungen berücksichtigen:

- Das maximal verfügbare Budget für Werbeaktivitäten beläuft sich auf 100.000 €.
- Der Fernsehsender bietet Zeit für höchstens vier Werbespots.
- Der Radiosender bietet Zeit für höchstens zehn Werbespots.
- Die Zeitung hat Platz für bis zu sieben Anzeigen.
- Die Werbeagentur verfügt über Zeit- und Personalkapazitäten, die die Produktion von maximal 15 Werbespots und -anzeigen zulassen.

Lösen Sie das Problem für die Werbeagentur, indem Sie zunächst eine Modell des Problems formulieren und dieses anschließend mit CPLEX lösen. (optimale Lösung: 184000)

5. Aufgabe (Ganzzahliges Programm / Modellierung)

Die Holding Gesellschaft für Agrarbetriebe SothernPlanting möchte ihre landwirtschaftliche Produktion für das kommende Jahr planen und bittet Sie um eine Empfehlung. Derzeit werden die Unternehmen A, B und C von der Holding betrieben.

Der Ernteertrag der Unternehmen wird begrenzt durch das bewässerungsfähige Land und das vom staatlichen Wasserkommissar vorgegebene Wasserkontingent:

Unternehmen	Bewässerungsfähiges Land (in ha)	Wasserkontingent (in m^3)
A	400	600
B	600	800
C	300	375

Es ist für das kommende Jahr ein guter Absatz von Zuckerrüben, Baumwolle und Hirse zu erwarten. Diese Sorten unterscheiden sich im Wasserverbrauch und im Ertrag. Außerdem werden von der Regierung Obergrenzen für die Anbauflächen dieser Pflanzen vorgegeben:

Pflanzsorte	Obergrenze (in ha)	Wasserverbrauch (in m^3/ha)	Ertrag ($/ha)
Zuckerrüben	600	3	400
Baumwolle	580	2	300
Hirse	325	1	100

Die drei Unternehmen A, B und C haben außerdem beschlossen, jeweils den gleichen Anteil ihrer bewässungsfähigen Anbaufläche zu bepflanzen, damit alle die gleichen Chancen haben.

a) Welche Pflanzen sollten die Unternehmen A,B und C in welchem Umfang anbauen, um den Gewinn der SothernPlanting zu maximieren? Modellieren Sie das als Lineares Problem in OPL und lassen sich dort ein Optimum berechnen.
b) Die Anbauflächen sind in Rechtecke a 10ha aufgeteilt, weil es sonst zu kompliziert zu bewirtschaften ist. Deshalb dürfen Lösungen für das o.g. Problem nur solche Anbauflächen vorsehen, die ganzzahlig durch 10 teilbar sind. Modifizieren Sie Ihre Lösung aus Aufgabenteil a), so dass diese Bedingung zusätzlich erfüllt wird und Lösen Sie dieses MIP-Problem mit OPL.
c) Implementieren Sie das Modell nun so, dass Mengen für Betriebe und Pflanzsorten verwendet werden und die Constraints mit forall und sum formuliert sind.

6. Aufgabe (Ganzzahliges Programm / Modellierung)

Ein Landkreis enthält sechs Städte, deren Notfallversorgung sichergestellt werden muss. In diesem Zusammenhang ist der Bau einer bestimmten Anzahl von Rettungswachen in diesen Städten geplant. Dabei kann eine Rettungswache mehrere Städte abdecken, allerdings darf die Fahrzeit von der Wache zum Unfallort maximal 15 Minuten betragen. In der folgenden Tabelle sind die Fahrzeiten t_{ij} zwischen einzelnen Städten *i* und *j* angegeben:

t_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	0	23	14	18	10	32
2	23	0	24	13	22	11
3	14	24	0	60	19	20
4	18	13	60	0	55	17
5	10	22	19	55	0	12
6	32	11	20	17	12	0

a) Stellen Sie ein ganzzahliges Programm zur Bestimmung der minimalen Anzahl der Rettungswachen sowie deren Standorte auf und lösen Sie dieses in CPLEX. (optimale Lösung: 2)

b) Hinterlegen Sie die Daten des Problems in einer separaten Excel-Datei, die sie in einer .dat-Datei einlesen.

c) Wenn Sie die Daten zunächst mit ILOG Script geeignet transformieren, kommen Sie mit sehr wenigen Entscheidungsvariablen aus.

7. Aufgabe (Ganzzahliges Programm / Modellierung)

Die Firma FastGear hat ein völlig neues Getriebe entwickelt und sucht nun nach einem Standort für eine neue Produktionsstätte. Es gilt dabei zu berücksichtigen, dass einmal wöchentlich eine Ladung Getriebe an 4 verschiedene Automobil-Werke ausgeliefert werden muss. Die 4 Werke haben die Koordinaten (18,2), (4,0), (6,20) und (12,18). Die Kosten für den Transport einer Ladung belaufen sich auf 6 €, 2 €, 7 € bzw. 4 € pro Kilometer. Die Entfernung wird mit der Manhattan-Metrik gemessen (vgl. z.B. http://de.wikipedia.org/wiki/Manhattan-Metrik), wobei eine Entfernungseinheit der Metrik 13 Kilometer entspricht. Gesucht ist ein optimaler Standort für die neue Produktionsstätte der Firma, welche die Summe der Kosten für die Auslieferung minimiert. Wie hoch sind die wöchentlichen Gesamtkosten?

a) Lösen Sie das Problem, indem Sie die gegebenen Koordinaten in einem zweidimensionalen Feld speichern.

b) Lösen Sie das Problem, indem Sie die gegebenen Punkte als Menge von Instanzen eines Tupels behandeln.

8. Aufgabe (Ganzzahliges Programm / Modellierung)

Die Firma "Italia" produziert und vertreibt Pasta. Sie hat drei verschiedene Sorten in ihrem Sortiment – Spaghetti, Maccheroni und Tagliolini. Zur Herstellung werden pro Packung 0,5 Einheiten Mehl und 0,2 Eier (Spaghetti), 0,4 Einheiten Mehl und 0,4 Eier (Maccheroni) bzw. 0,3 Einheiten Mehl und 0,6 Eier (Tagliolini) benötigt. Es besteht eine Nachfrage von 100, 200 bzw. 300 Packungen. "Italia" kann die Pasta selbst herstellen (Kosten von 60, 80 bzw. 30 Cent pro Packung) oder von einer anderen Firma beziehen (Kosten von 80, 90 bzw. 40 Cent pro Packung). Jedoch dürfen maximal 200 Packungen pro Pasta-Sorte fremdbezogen werden. Für die Eigenherstellung stehen außerdem nur 150 Einheiten Mehl und 120 Eier zur Verfügung. Bestimmen Sie die kostenminimale Kombination aus Eigenherstellung und Fremdbezug.

a) Modellieren Sie das beschriebene Problem.

b) Lösen Sie das Problem, indem Sie es in IBM ILOG CPLEX implementieren. Verwenden Sie hierbei für die Pasta-Sorten ein Tupel mit den Merkmalen "name", "mehl", "eier", "kosten_eigen", "kosten_fremd" und "nachfrage". (optimale Lösung: 34000)

c) Geben Sie die Lösung und den Zielfunktionswert mit ILOG Script aus.

d) Lagern Sie die Daten in eine .dat-datei aus

e) Implementieren Sie einen Systemtest für Ihr Modell. Im Idealfall stellt Italia je 100 Einheiten selbst her und bezieht 100 Einheiten Maccheroni und 200 Tagliolini

f) Implementieren Sie in weiteren .dat-Dateien zwei weitere Testfälle für das Problem mit anderen Eingabedaten. Davon soll eines unlösbar sein (zu wenig Ressourcen) und eines mit fehlerhaften Eingaben arbeiten (z.B. negative Anzahl von…) Passen sie Ihr Programm so an, das auch diese Tests erfolgreich sind. Dazu ist die Implementierung einer testbaren Fehlerverarbeitung notwendig.

9. Aufgabe (Gemischt-ganzzahliges Programm / Modellierung)

Ein Bauunternehmer muss eine größere Menge Kies von zwei Kiesgruben zu drei Baustellen in einer Stadt transportieren. Dabei können von der ersten Kiesgrube im Norden der Stadt maximal 18 Tonnen bezogen werden. Von der zweiten Kiesgrube im Süden der Stadt können maximal 14 Tonnen bezogen werden. Weiterhin ist bekannt, dass die erste Baustelle zehn Tonnen, die zweite fünf Tonnen und die dritte zehn Tonnen Kies benötigt. Der Kaufpreis in € pro Tonne in den einzelnen Kiesgruben und die Transportkosten in € pro Tonne von den Kiesgruben zu den Baustellen sind in der folgenden Tabelle gegeben:

Kies-grube	Transportkosten in € pro Tonne zu Baustelle			Preis in € pro Tonne
	1	2	3	
Nord	30	60	50	100
Süd	60	30	40	120

Darüber hinaus muss der Bauunternehmer Lastwagen mieten, um den Transport durchzuführen. Da das Ganze schnell gehen soll, müssen die Lastwagen aber mehr oder weniger gleichzeitig fahren. Somit kann ein Lastwagen nur für eine Tour von einer Kiesgrube zu einer Baustelle eingesetzt werden. Die Spedition, von der die Lastwagen gemietet werden sollen, bietet nun Lastwagen mit einer Kapazität von fünf Tonnen pro Lastwagen an. Die Mietkosten pro geliehenem Lastwagen betragen 50 €. Weiterhin kann die Spedition maximal sechs dieser Fahrzeuge zur Verfügung stellen. Darüber hinaus kann die erste Baustelle nicht von der Kiesgrube im Süden angefahren werden bzw. nur durch Inkaufnahme eines sehr großen Umwegs.

Das Ziel ist es nun die Anzahl der Fahrzeuge und die Kiesmengen, die zwischen den Kiesgruben und den einzelnen Baustellen eingesetzt bzw. transportiert werden, so zu bestimmen, dass die Gesamtkosten minimal werden.

a) Dazu soll ein gemischt-ganzzahliges lineares Programm aufgestellt werden, das anschließend in CPLEX gelöst wird. (optimale Lösung: 3850)
b) Initialisieren Sie dabei sämtliche Datenvariablen in einer separaten Daten-Datei.

10. Aufgabe (Lineares Programm / Modellierung)

Die Firma *Logan Manufacturing* möchte zwei Benzinsorten (A und B) für ihre Lastkraftwagen mischen, um auf diese Weise die Kosten für Treibstoff zu minimieren. Im nächsten Monat werden mindestens 3000 Liter Treibstoff benötigt. Die Möglichkeiten zur Lagerung von Benzin beschränken sich auf 4000 Liter. Auf dem Markt sind bis zu 2000 Liter von Benzinsorte A und bis zu 4000 Liter von Benzinsorte B erhältlich. Die Treibstoffmischung muss eine Oktanzahl von mindestens 80 aufweisen. Das bei der Mischung der beiden Benzinsorten entstehende Volumen entspricht der Summe der jeweils eingesetzten Volumina. Die Oktanzahl der Benzinmischung ergibt sich als gewichteter Durchschnitt der Oktanzahlen der beiden Benzinsorten, wobei die Gewichtung proportional zum jeweiligen Volumen der Benzinsorten ist. Benzinsorte A hat eine Oktanzahl von 90 und kostet € 1,20 pro Liter. Benzinsorte B hat eine Oktanzahl von 75 und kostet € 0,90 pro Liter.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm. Kommentieren Sie kurz Ihre benutzten Variablen, die Zielfunktion und die Nebenbedingungen. Implementieren und lösen Sie das Problem mit CPLEX, wobei die Daten in einer separaten Datendatei gespeichert werden (optimale Lösung: 3000)
b) Geben Sie die optimale Lösung mit OPL Script formatiert an der Konsole aus
c) Implementieren Sie einen Systemtest für Ihr Modell: Die minimalen Kosten sind 3000. Diese werden erreicht, wenn man 1000l der Sorte A und 2000l der Sorte B verwendet
d) Überprüfen Sie mit OPL Script vor der Optimierung die Plausibiltät der Daten, so dass die Optimierung nur durchgeführt wird, wenn es Sinn macht. Ansonsten soll eine Fehlermeldung ausgegeben werden. Sinnlos wären z.B. negative Bedarfe.
e) Testen Sie, ob Ihr Modell zur Einhaltung der minimalen Oktanzahl korrekt arbeitet, indem Sie alle dafür irrelevanten Constraints deaktivieren (mittels condition constraints) und dann Tests durchführen
f) Implementieren Sie einen weiteren Testfall, für ein unlösbares Problem. Überlegen Sie, welche Constraints für dieses Problem ggf. relaxiert werden müssen und schalten Sie diese in der Vorverarbeitung mittels conditional constraints aus.

11. Aufgabe (Lineares Programm / Modellierung)

Für die Studenten der Universität Augsburg wird ein Ernährungsprogramm zusammengestellt. Die Zielsetzung besteht darin, die Studenten kostenminimal zu ernähren. Voraussetzung hierfür ist jedoch, dass das Ernährungsprogramm zwischen 1800 und 3600 Kalorien beinhaltet. Aus der Speisestärke dürfen höchstens 1400 Kalorien stammen, mindestens 400 Kalorien müssen aus Proteinen kommen. Das Ernährungsprogramm soll sich aus zwei Mahlzeiten A und B zusammensetzen. Mahlzeit A kostet € 0,75 pro Kilogramm und enthält 600 Kalorien, wobei 400 Kalorien aus Proteinen und 200 Kalorien aus Speisestärke stammen. Jeder Student darf nicht mehr als zwei Kilogramm von Mahlzeit A erhalten. Mahlzeit B kostet € 0,15 pro Kilogramm und enthält 900 Kalorien, wobei 700 Kalorien aus Speisestärke, 100 Kalorien aus Proteinen und 100 aus Fetten stammen.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm. Kommentieren Sie kurz Ihre benutzten Variablen, die Zielfunktion und die Nebenbedingungen.

b) Implementieren und lösen Sie das Problem mit CPLEX. (optimale Lösung: 0,681)

12. Aufgabe (Lineares Programm / Modellierung)

Die Speditionsfirma *GoNear* wurde vor kurzem von einem größeren Unternehmen mit der kompletten Verteilung ihrer Produkte von den unternehmenseigenen Lagern zu den Kunden beauftragt. *GoNear* hat von seinem Auftraggeber dazu einen Distributionsplan erhalten, welcher sich monatlich nahezu wiederholt und in dem aufgelistet ist, wie viele Auslieferungen pro Tag zu erledigen sind.

Arbeitstag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Auslieferungen	7	5	6	4	8	9	1	3	12	7
Arbeitstag	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Auslieferungen	7	6	5	8	2	10	7	8	4	5

Für die Auslieferungen sollen Sprinter eingesetzt werden. Da eine Auslieferungstour in der Regel den ganzen Tag dauert, kann ein Sprinter immer nur eine Auslieferung pro Tag erledigen. Die Fixkosten pro Tag für die Sprinter belaufen sich auf 60 € und die variablen Kosten auf 30 €. Kann *GoNear* einmal nicht alle täglichen Auslieferungen mit den eigenen Fahrzeugen erledigen, so beauftragt *GoNear*, um einer Vertragsstrafe zu entgehen, eine andere Speditionsfirma mit dem Transport. Dies kostet sie allerdings 150 € pro Auslieferung. Ziel ist es, die kostenminimale Anzahl an Sprintern zu bestimmen.

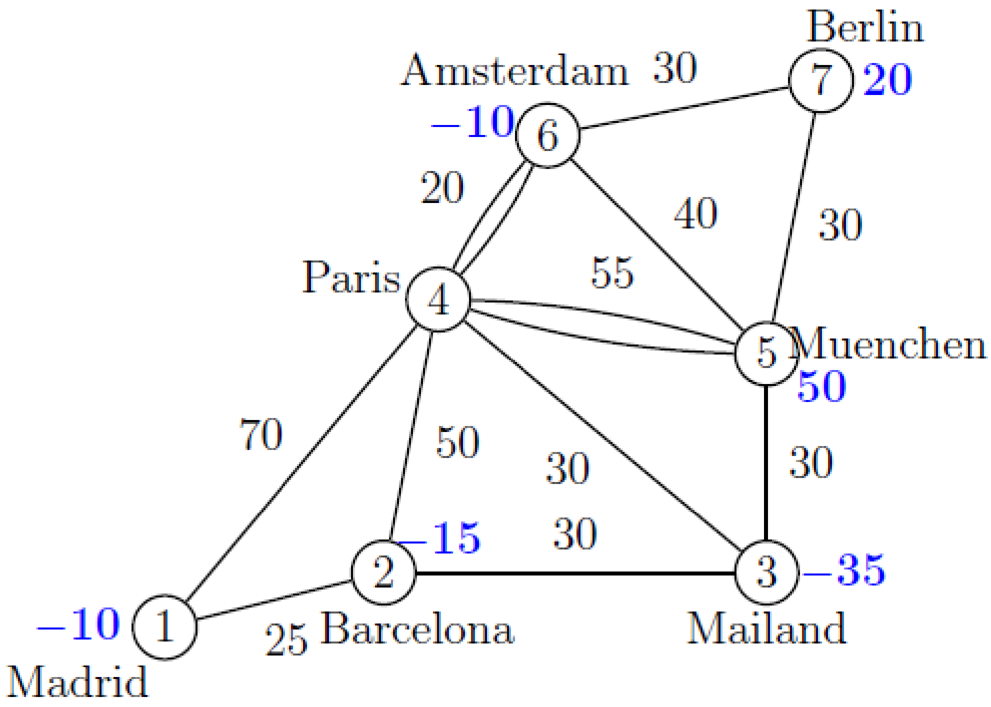
a) Implementieren Sie das Programm in CPLEX und lesen Sie die benötigten Daten (oben gegebene Tabelle) dabei aus einer Excel-Datei ein. Schreiben Sie anschließend ihre Entscheidungen in geeigneter Form in dieselbe Excel-Datei.
b) Implementieren Sie Tests für die Aufgabe: Der Zielfunktionswert (Kosten) der optimalen Lösung bei diesen Daten ist: TODO, wobei TODO fremdfahrzeuge angemietet werden müssen

13. Aufgabe (Lineares Programm/Modellierung)

Das Schweizer Transportunternehmen *NTN* mit Sitz in Lausanne vermietet Container für Transporte. Wenn ein Kunde Waren zwischen zwei Orten zu transportieren hat, liefert *NTN* eine gewünschte Anzahl leerer Container an den Ort der Abholung. Sobald die Waren am Ziel angekommen sind und die Container entladen wurden, werden sie von *NTN* wieder abgeholt und zum nächsten Kunden oder in das nächstgelegene Depot transportiert.

Damit muss NTN in regelmäßigen Abständen (meist wöchentlich) leere Container neu platzieren, was sehr teuer ist (ca. 35% der gesamten Betriebskosten). Im vergangenen Monat mussten mehrere ISO 20 Container den Terminals in Amsterdam, Berlin, München, Mailand, Barcelona und Madrid neu zugewiesen werden.

Die Problemstellung ist in nachfolgender Abbildung skizziert. Positive bzw. negative Zahlen an den Knoten stehen für Angebots- bzw. Nachfragemengen. Kantenbewertungen geben Transportkosten pro verschobenem Container an.



Finden Sie eine Lösung für den transportkostenminimalen Ausgleich von Angebot und Bedarf an leeren Containern. Modellieren Sie dazu zunächst das Problem und implementieren Sie es anschließend in CPLEX. Lesen Sie dabei die Daten aus einer Excel-Datei ein. Schreiben Sie anschließend ihre Entscheidungen in geeigneter Form in dieselbe Excel-Datei.

14. Aufgabe

Implementieren Sie in OPL einen solver für Sudokus. Die vorgegeben Werte stehen dabei in dat-Dateien (oder Excel). Realisieren Sie mindestens zwei unterschiedliche datensätze (Rätsel) und eine generische Lösung. Verwenden Sie zur Modellierung binäre Entscheidungsvariablen in einem dreidimensionalen Array.

15. Aufgabe (Ganzzahliges Programm / Modellierung)

Die Firma FlyRight stellt kleine Düsenflugzeuge her und verkauft diese an Firmen. Um auf die teilweise sehr speziellen Bedürfnisse der Kunden eingehen zu können, bietet FlyRight, abweichend vom Standarddesign, eine individuelle und flexible Konfiguration und Ausgestaltung der Flugzeuge an. Diese Flexibilität bedeutet jedoch einen zusätzlichen Entwicklungsaufwand und eine teilweise Neugestaltung des Produktionsplans. Kürzlich gingen Bestellungen von drei Kunden bei FlyRight ein. Da die Flugzeuge dringend benötigt werden, ist die Frist für deren Auslieferung sehr eng bemessen. Unglücklicherweise sind die Produktionskapazitäten jedoch durch frühere Bestellungen bereits nahezu ausgelastet, sodass FlyRight aufgrund der knappen Lieferfrist nicht alle Bestellungen annehmen kann. Daher muss sich die Firmenleitung nun entscheiden, ob sie den Auftrag eines Kunden annimmt und wenn ja, wie viele Flugzeuge sie für den Kunden herstellen soll. Die für die Entscheidung relevanten Daten sind in der folgenden Tabelle angegeben.

	Kunde		
	1	2	3
Anlaufkosten in Mio. €	3	2	0
Nettoverkaufsgewinn in Mio. €	2	3	0,8
Kapazitätsverbrauch pro Flugzeug in %	20	40	20
Maximale Flugzeuganzahl	3	2	5

Die erste Zeile gibt für jeden Kunden die Anlaufkosten an, die durch den zusätzlichen Entwicklungsaufwand und die Neugestaltung des Fabrikationsplans entstehen. Diese Kosten fallen nur einmal pro Kunde an. Die zweite Zeile listet für jeden Kunden den Nettoverkaufsgewinn (d.h. Verkaufspreis minus Produktionskosten) pro ausgeliefertem Flugzeug auf. Die dritte Zeile gibt den prozentualen Verbrauch der zur Verfügung stehenden Produktionskapazität an, wenn ein Flugzeug für einen der drei Kunden hergestellt wird. In der letzten Zeile wird die maximale Anzahl von Flugzeugen angegeben, die von jedem der Kunden nachgefragt wurde. Die Kunden akzeptieren es auch, wenn weniger als die nachgefragte Anzahl ausgeliefert wird.

FlyRight will nun wissen, wie viele Flugzeuge für jeden Kunden hergestellt werden sollen (wenn überhaupt), so dass der gesamte Gewinn, d.h. Verkaufsgewinne minus Anlaufkosten, maximiert wird.

a) Bestimmen Sie die Entscheidungsvariablen, die benötigt werden, um dieses Problem zu modellieren. Geben Sie dabei deren Bedeutung und Zulässigkeitsbereich an. Beachten Sie, dass folgende Entscheidungen getroffen werden müssen:

- Welche Kundenbestellungen werden bearbeitet?
- Wie viele Flugzeuge werden pro Bestellung ausgeliefert?

b) Bestimmen Sie die Zielfunktion des Problems.

c) Geben Sie die Nebenbedingungen des Problems an, die die oben beschriebene Situation modellieren. Achten Sie dabei darauf, dass die Kapazitätsbeschränkungen eingehalten werden müssen.

d) Lösen Sie das Problem mit CPLEX. (optimale Lösung: 9)

Geben Sie jeweils das ungelöste Rätsel und seine Lösung mit OPL Script aus.

16. Aufgabe (Modellierung mit logischen Verknüpfungen)

Gegeben seien n Bedingungen $B_{1,\dots,}$ B_n, die gelten können oder nicht. Jeder Bedingung B_i ist eine Entscheidungsvariable x_i zugeordnet mit

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{falls Bedingung } i \text{ gilt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Modellieren Sie folgende Zusammenhänge mit Hilfe linearer Nebenbedingungen (ohne logische Operatoren):

a) Wenn Bedingung B_1 gilt, dann gilt auch B_2.

b) Es darf höchstens eine der beiden Bedingungen B_1 oder B_2 gelten.

c) Es muss entweder B_1 oder B_2 gelten.

d) Es muss mindestens eine der Bedingungen B_1 oder B_2 gelten.

e) Damit eine der Bedingungen $B_{1,\dots,}$ B_n gelten kann, muss B_1 erfüllt sein.

f) Damit Bedingung B_1 gelten kann, muss sowohl B_2 als auch B_3 erfüllt sein.

g) Damit Bedingung B_1 gelten kann, muss mindestens eine der Bedingungen B_2 oder B_3 erfüllt sein.

h) B_1 gilt genau dann, wenn Bedingung B_2 erfüllt ist.

i) Bedingung B_1 gilt genau dann, wenn sowohl B_2 als auch B_3 erfüllt ist.

j) Bedingung B_1 gilt genau dann, wenn mindestens eine der Bedingungen B_2 oder B_3 erfüllt ist.

17. Aufgabe (Modellierung mit Mengenverknüpfungen)

In Ergänzung zu Aufgabe 16 seien zusätzlich zwei Mengenvariablen t und s gegeben (z.B. Transport-, Produktions- oder Bestellmengen).

Modellieren Sie folgende Zusammenhänge mit Hilfe linearer Nebenbedingungen (ohne logische Operatoren):

a) t kann nur dann größer als 0 sein, wenn B_1 erfüllt ist.

b) *t* darf höchstens *U* sein.

c) *t* kann nur dann größer als 0 sein, wenn B_1 erfüllt ist und in diesem Fall auch nicht beliebig groß, sondern höchstens *U*.

d) *t* kann nur dann größer als 0 sein, wenn sowohl B_1 als auch B_2 erfüllt sind und diesem Fall auch nicht beliebig groß, sondern höchstens *U*.

e) *t* kann nur dann größer als 0 sein, wenn mindestens eine der beiden Bedingungen B_1 oder B_2 erfüllt ist.

f) *t* hat mindestens den Wert *L*.

g) Wenn B_1 erfüllt ist, hat *t* mindestens den Wert *L*, ansonsten ist $t = 0$.

h) Es darf höchstens eine der beiden Variablen *t* oder *s* einen Wert größer als 0 annehmen.

18. Aufgabe

a) Planung von Tortenbestellungen.

Konditormeister Ehrlich stellt Geburtstagstorten auf Bestellung her. Die aktuell bestellten n Torten müssen natürlich immer spätestens zum Geburtstagstermin fertig sein, die in einem Array termin[1..n] abgespeichert werden. Zur Herstellung der Torte i braucht Meister Ehrlich jeweils dauer[i] ganze Tage. Die Vorbereitung dauert in der Regel mehrere Tage, kann nicht unterbrochen werden und es kann immer nur eine Torte auf einmal hergestellt werden

Wenn die Torten zu früh fertig sind, sind sie nicht mehr frisch und es entstehen Kosten dadurch, dass die Qualität nicht so gut ist.

Schreiben Sie ein OPL Modell, das für Meister Ehrlich die optimalen Zeitpunkte start[1..n] zum Beginnen der Herstellung der Torten berechnet. Optimal heißt, dass die Summe der o.g. Kosten minimiert ist. Sie können dabei davon ausgehen, dass die Werte n, termin und dauer in einer separaten .dat-Datei gegeben sind.

b) Für andere Kuchen ist das Lieferdatum nicht ganz so kritisch, es enstehen lediglich höhere Kosten, wenn verspätet geliefert wird.

Schreiben Sie nun ein zweites OPL Modell, das ebenfalls optimale Startzeitpunkte berechnet, aber eine andere Kostenfunktion verwendet:

- Wenn die Herstellung x Tage ***vor*** dem Liefertermin abgeschlossen ist sind die Kosten (wie in Aufgabenteil a) gleich x
- Wenn die Herstellung x Tage ***nach*** dem Liefertermin erst abgeschlossen ist belaufen sich die Kosten auf 3*x.

19. Aufgabe (JSSP)

Modellieren Sie das Job Shop Scheduling Problem (JSSP) mit MIP unter verwendung eines BigM-Modells

Aufgaben mit unterschiedlichen Dauern müssen gegeben Ressourcen (Maschinen) so zugeordnet werden, dass keine Überlappungen auftreten und alle Reihenfolgen eingehalten werden. Gesucht ist die Zuordnung, bei der die gesamte Abarbeitungszeit (makespan) minimal ist.

a) Lösen Sie die Probleminstanz ft06 aus der ORlib http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/files/jobshop1.txt
b) Modifizieren Sie Ihre Lösung so, dass anstatt des BigM-Modells eine OR-Verknüpfung verwendet wird. Vergleichen Sie die Performanz der beiden Modelle.
c) Erzeugen Sie nun zwei weitere Modelle aus denen aus a) und b), in denen Sie CP als Lösungsverfahren einsetzen ansonsten aber nur die nötigsten Modifikationen am Modell machen. Vergleichen Sie die Performanz der Modelle
d) Erstellen Sie ein weiteres Modell für CP, das die einschlägigen Scheduling-Constraints (noOverlap…) verwendet um Variablen der Typen sequence und interval zu optimieren. Vergleichen Sie erneut die Performanz.

(Wenn Sie sich von publizierten Lösungen inspirieren lassen achten Sie darauf, dass CPLEX als solver genutzt wird (kein CP)

20. Aufgabe (Ganzzahliges Programm / Modellierung)

Eine Gruppe von Investoren hat zehn Forschungsprojekte zusammengestellt, bei denen sich eine Investition lohnen würde. Bei manchen dieser Projekte handelt es sich um Grundlagenforschung, welche Voraussetzung für die Erforschung anderer Projekte ist.

Jedes dieser Projekte hat eine Laufzeit von einem Jahr. Das Ergebnis der Forschungen kann danach vermarktet werden und die Investoren bekommen das Investitionskapital plus Zinsen zurückgezahlt. Das Kapital, das benötigt wird, um in die einzelnen Projekte zu investieren, ist in untenstehender Tabelle gegeben. Weiterhin sind in dieser Tabelle die jeweiligen Zinssätze in Prozent angegeben.

Als Gesamtinvestitionskapital stehen für diese Projekte € 20000 zur Verfügung. Daneben müssen noch die folgenden Beschränkungen beachtet werden:

- In die Projekte 1 und 7 kann nur zusammen oder gar nicht investiert werden.

- Es muss in mindestens eines der Projekte 1 oder/und 2 investiert werden.
- Es muss in genau eines der Projekte 5 oder 6 investiert werden, beide zusammen sind nicht erlaubt.
- In Projekt 4 kann nur investiert werden, wenn auch in Projekt 7 investiert wird.
- Es darf entweder in Projekt 1 oder in Projekt 4 oder in keines von beiden investiert werden, beide zusammen sind nicht erlaubt.
- Projekt 6 ist ein Grundlagenprojekt und Voraussetzung für die Erforschung der Projekte 1 und 3.
- Projekt 7 ist ein fortgeschrittenes Projekt, das nur erforscht werden kann, wenn zuvor die beiden Projekte 2 und 5 bearbeitet wurden.
- Ähnlich verhält es sich mit Projekt 4: Dies darf nur bearbeitet werden, wenn zuvor Projekt 3 oder Projekt 5 erforscht wurde.
- Projekt 8 und 9 sind reine Grundlagenprojekte und können nicht vermarktet werden. Da Projekt 10 auf ihnen aufbaut, macht es nur Sinn, alle drei Projekte gemeinsam zu erforschen oder keines von ihnen.
- Es muss entweder in genau ein Projekt aus der Gruppe 1, 4, 5 oder in genau zwei Projekte aus der Gruppe 2, 3, 6, 7 investiert werden.

Projekt	Investitionskapital in €	Zinssatz in % des Investitionskapitals
1	2500	7
2	3800	5.5
3	3100	6
4	2900	5
5	3000	7
6	4100	6
7	2800	7.5
8	1700	0
9	2200	0
10	2500	9.5

Unter den gegebenen Bedingungen soll nun der Zinsgewinn mit Hilfe eines ganzzahligen Programms maximiert werden.

Modellieren Sie dieses Problem zunächst vollständig mit linearen Nebenbedingungen (ohne logische Operatoren) und lösen Sie es anschließend mit CPLEX. (optimale Lösung: 692,5)

21. Aufgabe (Modellierung / logische Operatoren)

Implementieren Sie Aufgabe 20 erneut in CPLEX und verwenden Sie dabei die in der Präsenzveranstaltung vorgestellten logischen Operatoren.

22. Aufgabe (Modellierung / Logische Bedingungen)

In einem Wettbüro für Sportwetten werden 10 unterschiedliche Einzelwetten angeboten. Jede Wette hat einen festen Preis und eine feste Quote, sollte man richtig gesetzt haben. Man kann jede Wette nur einmal abschließen und es gibt keine Teilwetten.

	Wette									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kosten in €	5.5	23	12.5	21	33	11	9.5	17	14.5	28
Quote	2.0	1.2	1.8	1.4	1.1	1.6	1.5	1.2	1.25	1.3

Um sich von anderen Wettbüros abzugrenzen, gelten folgende Regeln:

- Auf Wetten 1 und 2 kann nicht zusammen gesetzt werden.
- Auf Wette 3 kann nur gesetzt werden, wenn auch auf die Wetten 7 und 8 gesetzt wurde.
- Wetten 4 und 10 können nur zusammen genommen werden oder gar nicht.
- Wenn gewettet wird, dann muss aus den Wetten 1,3,5,7,9 mindestens eine Wette gewählt werden.
- Wird auf Wette 1 gesetzt, dann dürfen aus der Gruppe 2,4,6,8,10 nur maximal 3 Wetten ausgewählt werden.
- Wenn Wette 5 gewählt wird, dann kann auf 9 oder 10 gesetzt werden, aber nicht auf beide.
- Damit Wette 4 genommen werden kann, muss Wette 1 oder 3 gewählt werden.

Herr Glückspilz hat € 100, die er im Wettbüro einsetzen möchte. Da er sich sicher ist, dass er alle Wetten gewinnt, möchte er sie so auswählen, dass er den größtmöglichen Gewinn macht.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm. Kommentieren Sie kurz Ihre benutzten Variablen, die Zielfunktion und die Nebenbedingungen.

b) Implementieren und lösen Sie das Problem mit CPLEX. Lesen Sie die Daten aus einer Datendatei ein und schreiben Sie eine Ausgabe mit ILOG Script. (optimale Lösung: 40,45)

c) Implementieren Sie das Problem erneut und verwenden Sie dabei die in der Präsenzveranstaltung vorgestellten logischen Operatoren von CPLEX.

23. Aufgabe (Modellierung / Logische Bedingungen)

Der Bauer Willi hat sich ein an seinen Hof angrenzendes Feld von 100 m^2 gekauft, das er nun bepflanzen möchte. Dazu stehen ihm verschiedene Produkte zur Verfügung: Weizen, Kartoffeln, Salat, Raps, Möhren und Zuckerrüben. Er beschließt, mindestens 2 Sorten anzubauen. Das Saatgut bekommt er von seinem Lieferanten in festen Einheiten zu fixen Kosten. Pro Einheit Saatgut kann er eine bestimmte Fläche von dem Produkt anbauen. Außerdem kennt Willi die Marktpreise für seine Produkte.

	Produkt					
	Weizen	Kartoffeln	Salat	Raps	Möhren	Zuckerrüben
Kosten je Einheit	5.0	7.2	10.4	4.3	2.7	3.8
Marktpreis je Einheit	20.0	22.5	14.7	41.2	17.5	12.0
Fläche je Einheit in m^2	2.0	2.5	1.4	4.2	1.5	2.0

Außerdem gelten folgende Bedingungen:

- Da Weizen und Kartoffeln Grundnahrungsmittel sind, möchte Willi mindestens eins von beiden anbauen.
- Aus Erfahrung weiß Willi, dass er nicht Weizen, Kartoffeln und Zuckerrüben anbauen kann, sondern nur maximal 2 Produkte davon.
- Raps darf Willi nur anbauen, wenn er auch Zuckerrüben anbaut.
- In einer Umfrage hat Willi festgestellt, dass Leute gerne Salat und Möhren zusammen kaufen. Also möchte er, wenn er Salat anbaut, auch Möhren anbauen.

Willi stellt sich nun die Frage, welche Produkte er in welchen Mengen anbauen soll. Er möchte so viel wie möglich mit seinen Produkten auf dem Markt verdienen. (Er geht davon aus, dass alle Produkte verkauft werden.)

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm. Kommentieren Sie kurz Ihre benutzten Variablen, die Zielfunktion und die Nebenbedingungen.

b) Implementieren und lösen Sie das Problem mit CPLEX. Lesen Sie die Daten aus einer Datendatei ein und schreiben Sie eine Ausgabe mit ILOG Script. Es soll ausgegeben werden, welche Produkte angebaut werden und in welchen Einheiten, sowie der Gewinn.

c) Implementieren Sie das Problem erneut und verwenden Sie dabei die in der Präsenzveranstaltung vorgestellten logischen Operatoren von CPLEX.

24. Aufgabe (Logische Operatoren)

Das logische Labyrinth: Ein Puzzlefan, zugleich ein König, fand große Genugtuung daran, Gefangenen eine Puzzlechance zur Freiheit zu geben. Heute geht dies wie folgt vor sich: Der Gefangene hat unter neun Räumen zu wählen. Ein Raum enthält ein Pferd (zum Ritt in die Freiheit), die anderen sind entweder leer, oder ein Tiger befindet sich darin. Jeder Raum ist mit einer Inschrift versehen; diejenige am Raum mit Pferd ist wahr, diejenigen an den Tigerräumen sind falsch, die anderen können wahr oder auch falsch sein. (Sie wissen zusätzlich, dass sich mindestens 3 Tiger in den Räumen befinden.)

- Inschrift an Tür I: Das Pferd ist in einem Raum mit ungerader Nummer.
- Inschrift an Tür II: Dieser Raum ist leer.
- Inschrift an Tür III: Entweder ist Inschrift V richtig oder Inschrift VII ist falsch.
- Inschrift an Tür IV: Inschrift I ist falsch.
- Inschrift an Tür V: Entweder ist Inschrift II oder IV richtig.
- Inschrift an Tür VI: Inschrift III ist falsch.
- Inschrift an Tür VII: Das Pferd ist nicht in Raum I.
- Inschrift an Tür VIII: In diesem Raum ist ein Tiger und Raum IX ist leer.
- Inschrift an Tür IX: In diesem Raum ist ein Tiger und Inschrift VI ist falsch.

Ist die Puzzlechance ein Weg in die Freiheit, d.h., kann ein Gefangener aufgrund der Inschriften und Hinweise ermitteln, in welchem Raum sich das Pferd befindet? Falls nicht, was kann ein Gefangener aus den Angaben schließen?

Implementieren Sie das Problem mithilfe der kennengelernten logischen Operatoren in IBM ILOG CPLEX und erzeugen Sie eine geeignete Textausgabe.

25. Aufgabe (Modellierung/Relaxationen)

Sie sind damit beauftragt für den Stand ihrer Hochschulgruppe Muffins zum Verkaufen zu backen. Leider haben Sie vergessen im Vorfeld einzukaufen und heute ist Sonntag. Am Montagmorgen sollen die Muffins verkauft werden, so dass Sie sie noch heute backen müssten. Pro Muffin benötigen Sie: 10g Butter, 20g Zucker, ein Drittel Ei, 10ml Milch, 10g Mehl. Für die Schoko-Muffins werden zusätzlich noch 10g Kakaopulver pro Stück gebraucht. (Da nur ganze Eier verwendet werden können, muss die Muffinanzahl jeweils ein Vielfaches von 3 betragen.) Zum Glück haben Sie einen hilfsbereiten Nachbarn. Insgesamt stehen Ihnen daher 250g Butter, 500g Zucker, 10 Eier, 1 Liter Milch, 500g Mehl und 150g Kakaopulver zur Verfügung. Schoko-Muffins sind sehr beliebt. Ihre Hochschulgruppe kann sie daher für 1,50 € pro Stück verkaufen und macht einen Gewinn von 1 € pro Stück. Die Vanille-Muffins können zu 1 € verkauft werden und bringen nur einen Gewinn von 0,75 €. Sie haben versprochen insgesamt mindestens 30 Muffins mitzubringen. Wie viele backen Sie von jeder Sorte, um den Gewinn ihrer Hochschulgruppe zu maximieren.

- Implementieren Sie das vorgestellte Problem mit CPLEX.
- Führen Sie die Optimierung durch und interpretieren Sie die Ausgaben im „Konflikte-Fenster“ und im „Relaxationen-Fenster“.
- Versuchen Sie, auf Basis der Informationen im „Konflikte-Fenster“ das Problem manuell zu beheben. Dokumentieren Sie Ihr Vorgehen und interpretieren Sie das beobachtete Verhalten der Software.
- Lassen Sie sich von CPLEX eine relaxierte Lösung einschließlich des zugehörigen Zielfunktionswerts ausgeben.
- Recherchieren Sie in der ILOG Hilfe, wie die Software zum Auffinden der relaxierten Lösung vorgeht. Wie lässt sich das Vorgehen durch den Nutzer beeinflussen? Spielen Sie mit den Einstellmöglichkeiten herum und dokumentieren Sie alle gewonnenen Erkenntnisse.

26. Aufgabe (CP Grundlagen)

Passen Sie Ihre Lösungen der Aufgabe 14 so an, dass sie von ILOG CP in OPL Studio gelöst wird.

27. Aufgabe

Implementieren Sie einen zweiten Sudoku-Solver, der die Rätsel aus den .dat-Dateien aus Aufgabe 14 mit Hilfe des Constraints all_different mit CP löst.

28. Aufgabe (CP vs. CPLEX)

- Implementieren Sie einen solver für beliebig große magische Quadrate (http://de.wikipedia.org/wiki/Magisches_Quadrat) mit ILOG CP. Untersuchen Sie die Performanz Ihrer Lösung.
- Implementieren Sie nun einen Solver für die selben Probleme auf der Basis von CPLEX.
- Verwenden Sie schließlich CP um ihr CPLEX-Modell zu lösen.
- Führen Sie nun eine Performanzanalyse zum Vergleich Ihrer drei Lösungsvarianten durch. Achten Sie dabei auf die Nachvollziehbarkeit und die Aussagekraft ihrer Darstellung.

29. Aufgabe

Implementieren Sie eine CP-basierte Lösung für das Problem „Golomb Ruler“ mit generischer Dimension n. Die Spezifikation des Problems finden Sie auf csplib.org/Problems/prob006

a) Führen Sie eine Performanzanalyse durch: Wie verhält sich n zur Laufzeit ihrer Lösung?

b) Integrieren Sie Symmetry Breaking (vgl http://kti.ms.mff.cuni.cz/~bartak/downloads/INAP2004proc.pdf) und untersuchen Sie, welche Auswirkungen dies auf die Laufzeit hat.

c) Erweitern Sie Ihr Modell um redundante Constraints, die obere und untere Grenzen für die einzelnen Markierungen festlegen (http://kti.ms.mff.cuni.cz/~bartak/downloads/INAP2004proc.pdf). Untersuchen Sie die Performanz erneut.

30. Aufgabe (Scheduling)

d) Lösen Sie Schichtplanungsprobleme mit ILOG CP. Verwenden Sie als Eingabedaten die Benchmarkprobleme aus http://www.cs.nott.ac.uk/~tec/NRP/ und modellieren Sie eine Lösung in OPL

e) Stellen Sie sicher, dass die Lösungen ihres Modells auch wirklich gültige Schichtpläne sind, indem Sie das Ergebnis mit OPL Script analysieren.

f) Vergleichen Sie die Performanz Ihrer Lösung mit der anderer publizierter Lösungen aus wissenschaftlichen Papieren, die auf der o.g. Seite dargestellt sind.