

## 0. Vorbemerkungen

### 0.1 Zahlen

- Natürliche Zahlen  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Ganze Zahlen  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$
- Rationale Zahlen (Brüche)  
 $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- Reelle Zahlen  $\mathbb{R}$ :

Die Gesamtheit aller endlichen oder unendlichen Dezimalbrüche (Veranschaulichung durch Zahlengerade).

### 0.2 Betrag einer reellen Zahl $a$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{sofern } a \geq 0 \\ -a & \text{sofern } a < 0 \end{cases}$$

Bsp.: i)  $|-3| =$     ii)  $|3| =$     iii)  $|3 - 7| =$     iv)  $|-3||4| =$

Rechenregeln: Für reelle Zahlen  $a, b$  gilt

- i)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Dreiecksungleichung)
- ii)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

### 0.3 Intervalle reeller Zahlen

- $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$   
 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$   
 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$   
 $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$   
 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$   
 $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$   
 $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

## 1. Grundrechenoperationen

- Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
- Division durch 0 ist nicht erlaubt
- "Punkt vor Strich"

Bsp.: i)  $6 \cdot 3 + 2 =$             ii)  $6 + 3 \cdot 2 =$

## 1.1 Rechnen mit Klammern

### 1.1.1 Rechengesetze für reelle Zahlen

$(a + b) + c = a + (b + c);$              $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$             (Assoziativgesetz)

$a + b = b + a;$              $a \cdot b = b \cdot a$             (Kommutativgesetz)

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$             (Distributivgesetz)

Bsp.:  $-(a - b) = b - a$

Bezeichnung: Statt  $a \cdot b$  schreibt man auch kurz  $ab$ .

- "Erst Operationen in Klammern ausführen"
- "Bei geschachtelten Klammern innen beginnen"

Bsp.:  $-(8 - (2 + 4)) =$

- Klammern "gliedweise ausmultiplizieren"

Bsp.:  $(2a - b)(9a + 4b) =$

- Ausklammern ( $\rightarrow$  Kürzen von Brüchen)

Bsp.:  $8ab + 20b^2 =$

- wiederholtes Ausklammern

Bsp.:  $4au + 8av - 2bu - 4aw - 4bv + 2bw =$

## 1.2 Binomische Formeln

- Binom: "Zweigliedriger" Ausdruck

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

$$\boxed{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2}$$

Bsp.: i)  $(a + b)^3 =$

ii)  $(2a + 6v)(2a - 6v) =$

iii)  $4a^2 + 28ab + 49b^2 = (\square + \nabla)^2, \quad \square = ?; \nabla = ?$

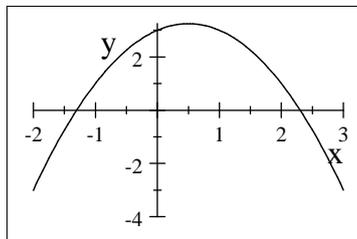
iv)  $55^2 = \underbrace{5 \cdot 6 \cdot 100 + 25}_{?}$

### 1.3 Quadratische Ergänzung

- Forme um:  $ax^2 + bx + c = a(x + b')^2 + c'$   
 $b' = ?, c' = ?$

→ Anwendung: Scheitelpunktform eines quadratischen Polynoms

Bsp.: i)  $-x^2 + x + 3 = -(x^2 - x - 3) = -\underbrace{\left(x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\right)}_{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$



$$-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

ii) Scheitelpunktform von  $x^2 + 4x + 3$

### 1.4 Bruchrechnen

- $\frac{a}{b}$  (Zähler  $a$ , Nenner  $b$ )
- Erweitern mit einer Zahl  $c \neq 0 \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

#### 1.4.1 Addition/Subtraktion

a) Gleichnamige Brüche (d.h. gleicher Nenner)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Bsp.:  $\frac{2a}{15b} - \frac{17a}{15b} =$

b) Ungleichnamige Brüche

- Bildung eines gemeinsamen Hauptnenners

Bsp.: i)  $\frac{3a-1}{4a-1} - \frac{3}{4} = \frac{(3a-1) \cdot 4}{(4a-1) \cdot 4} - \frac{3 \cdot (4a-1)}{4 \cdot (4a-1)} = \quad \left(a \neq \frac{1}{4}\right)$

$$\text{ii) } \frac{b+5c-a}{6} - \frac{3a+6c-7b}{4} + \frac{4a+7c-5b}{3} =$$

Anmerkung: Hauptnenner  $6 \cdot 4 \cdot 3$  möglich, aber umständlich.

Besser: Verwende als Hauptnenner das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner.

- Das kgV von gegebenen Zahlen ist die kleinste Zahl, die durch alle gegebenen Zahlen teilbar ist
- Berechnung kgV: "Produkt aller auftretenden Primfaktoren mit der höchsten vorkommenden Potenz"

$$\text{Bsp. } \left. \begin{array}{l} 6 = 2^1 \cdot 3^1 \\ 4 = 2^2 \\ 3 = 3^1 \end{array} \right\} \text{kgV}(6; 4; 3) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

Anmerkung: Begriff und Berechnung des kgV lassen sich analog auch auf algebraische Ausdrücke anwenden.

$$\text{Bsp.: iii) } \frac{a+2b}{3a^2-3ab} - \frac{1}{2b} - \frac{3b-a}{2ab-2b^2} =$$

$$\left. \begin{array}{l} 3a^2 - 3ab = 3a(a-b) \\ 2b \\ 2ab - 2b^2 = \end{array} \right\} \text{"kgV"} (3a^2 - 3ab; 2b; 2ab - 2b^2) = \dots$$

#### 1.4.2 Multiplikation/Division

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \left( \begin{array}{l} \text{"Zähler} \cdot \text{Zähler"} \\ \text{"Nenner} \cdot \text{Nenner"} \end{array} \right)$$

- Doppelbruch: "Zähler mit dem Kehrwert des Nenners multiplizieren"

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\text{Bsp.: i) } \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} =$$

$$\text{ii) } \frac{2}{3} : \frac{4}{7} =$$

$$\text{iii) } \frac{\frac{2}{3}}{5} =$$

- Für  $a \neq 0$  heißt  $\frac{1}{a}$  Kehrwert von  $a$

$$\text{Bsp.: Kehrwert von } -\frac{2}{3} =$$

- Kürzen (Ausklammern von gemeinsamen Faktoren aus Zähler und Nenner)

Anmerkung: Ein Bruch lässt sich immer durch den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von Nenner und Zähler kürzen.

- Der ggT von gegebenen Zahlen ist die größte Zahl, durch die alle gegebenen Zahlen teilbar sind.
- Berechnung ggT : "Produkt aller Primfaktoren die in allen gegebenen Zahlen vorkommen"

$$\text{Bsp.:i)} \left. \begin{array}{l} 6 = 2^1 \cdot 3^1 \\ 9 = 3^2 \\ 21 = 3^1 \cdot 7^1 \end{array} \right\} \text{ggT}(6;9;21) = 3$$

Anmerkung: Begriff und Berechnung des kgV lassen sich analog auch auf algebraische Ausdrücke anwenden.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & \frac{4a^2 - 9b^2}{21a^2b + 14a^3} \cdot \frac{7a + 5ab}{6b - 4a} = \\ & (4a^2 - 9b^2)(7a + 5ab) = (2a - 3b)(2a + 3b) \cdot a \cdot (7 + 5b) \\ & (21a^2b + 14a^3)(6b - 4a) = 7a^2(3b + 2a) \cdot 2 \cdot (3b - 2a) \\ \text{ii)} \quad & \left(1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1-a^2}{a^2}\right) = \end{aligned}$$

### 1.4.3 Partialdivision, speziell Polynomdivision

- Gegeben:  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}; a_n \neq 0$

Die Funktion  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  heißt Polynom vom Grad  $n$ .

- Bsp.: i)  $4x^3 - 3x - 1$  Polynom vom Grad 3  
 ii)  $x - 1$  Polynom vom Grad 1  
 iii) 4 Polynom vom Grad 0

Gegeben: Eine rationale Funktion  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ,

wobei  $p(x)$  ein Polynom vom Grad  $n$  und  $q(x)$  ein Polynom vom Grad  $m$  mit  $m \leq n$  ist.

Ziel: "Vereinfache"  $r(x)$

Durch Polynomdivision erreicht man die Darstellung:

$$r(x) = s(x) + \frac{R(x)}{q(x)},$$

wobei  $s(x)$  ein Polynom vom Grad  $n - m$  und  $R(x)$  ein Polynom mit einem Grad  $< m$  ist.

Die Polynomdivision erfolgt in 3 Schritten:

1. Teile den Summanden höchsten Grades des Zählers durch den Summanden höchsten Grades des Nenners
2. Multipliziere das Ergebnis aus 1. mit dem Nenner  $q(x)$  und
3. Subtrahiere das Ergebnis aus 2. vom Zähler und
- 4. erhalte damit den neuen Zähler

Dieses Vorgehen wird solange wiederholt, bis der Grad des neuen Zählers kleiner als der Grad des Nenners  $m$  ist.

Bsp.:  $(4x^3 - 2x^2 - 1) : (2x^2 - 1) = \underbrace{2x}_{1.} \underbrace{-1}_{1.} + \frac{2x-2}{2x^2-1}$

2./3. →  $\underline{-(4x^3 - 2x)}$

4. →  $-2x^2 + 2x - 1$

2./3. →  $\underline{-(-2x^2 + 1)}$

4. →  $2x - 2$

Wir erhalten:  $\frac{4x^3 - 2x^2 - 1}{2x^2 - 1} = 2x - 1 + \frac{2x - 2}{2x^2 - 1}$  bzw.

$$4x^3 - 2x^2 - 1 = (2x - 1)(2x^2 - 1) + 2x - 2$$

Anwendung: "Abspalten von Nullstellen"

- Aufgabe: Bestimme alle Nullstellen von  $4x^3 - 3x - 1$

Durch Raten sieht man, dass 1 eine Nullstelle dieses Polynoms ist, da  $4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 - 1 = 0$

- Dividiere nun  $4x^3 - 3x - 1$  durch den Linearfaktor "x - Nullstelle" (hier  $x - 1$ )  
 $(4x^3 - 3x - 1) : (x - 1) = 4x^2 + 4x + 1$

und erhalte damit:  $4x^3 - 3x - 1 = (x - 1)(4x^2 + 4x + 1)$

Die Nullstellen von  $4x^2 + 4x + 1$  sind dann ebenfalls Nullstellen von  $4x^3 - 3x - 1$

Im Bsp.:  $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$  und damit ist  $-\frac{1}{2}$  eine weitere Nullstelle (mit Vielfachheit 2).

Bsp.: Bestimme alle (reellen) Nullstellen von  $x^3 - 2x^2 + x - 2$

## 2. Potenzen (Wurzeln)

- $a^n$  (Basis  $a$ , Exponent  $n$ )

2.1 Def.: i)  $a^0 = 1$  ( $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ )

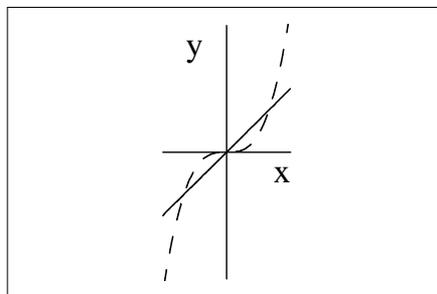
ii)  $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Bsp.:  $3^2 =$  ;  $-3^2 =$  ;  $(-3)^2 =$  ;  $(-3)^3 =$

## 2.2 Die Potenzfunktionen $x^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ )

a)  $x^n, n$  ungerade

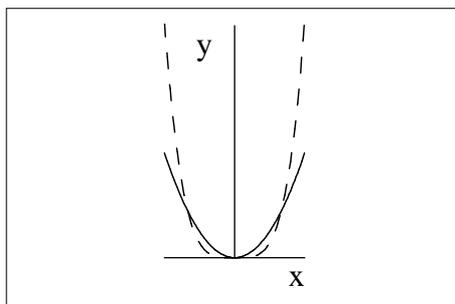


$x, x^3$  (gestrichelt)

Eigenschaften:

- Definitionsbereich:  $(-\infty; \infty)$
- Wertebereich:  $(-\infty; \infty)$
- Monotonie: streng monoton wachsend
- Symmetrie: ungerade (punktsymmetrisch zum Ursprung)
- Krümmung: konkav (rechtsgekrümmt) auf  $(-\infty; 0]$ ,  
konvex (linksgekrümmt) auf  $[0; \infty)$
- Wendepunkt:  $x = 0$

b)  $x^n, n$  gerade



$x^2; x^4$  (gestrichelt)

Eigenschaften:

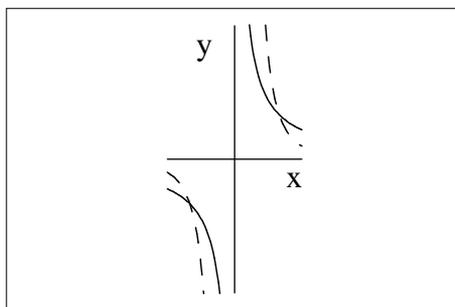
- Definitionsbereich:  $(-\infty; \infty)$
- Wertebereich:  $[0; \infty)$
- Monotonie: streng monoton wachsend auf  $[0; \infty)$ ,  
streng monoton fallend auf  $(-\infty; 0]$
- Symmetrie: gerade (achsensymmetrisch zur y-Achse)
- Krümmung: konvex

2.3 Def.:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  ( $a \in \mathbb{R}; a \neq 0; n \in \mathbb{N}$ )

Bsp.:  $3^{-2} =$  ;  $-3^{-2} =$  ;  $(-3)^{-2} =$  ;  $0.5^{-2} =$

2.4 Die Funktionen  $x^{-n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

a)  $x^{-n}$ ,  $n$  ungerade

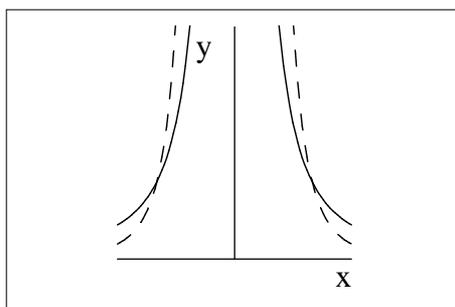


$x^{-1}$  ;  $x^{-3}$  (gestrichelt)

Eigenschaften:

- Definitionsbereich:  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
- Wertebereich:  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
- Monotonie: streng monoton fallend auf  $(0; \infty)$  und auf  $(-\infty; 0)$
- Symmetrie: ungerade
- Krümmung: konvex auf  $(0; \infty)$ , konkav auf  $(-\infty; 0)$
- Grenzwerte:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{-n} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{-n} = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0-0} x^{-n} = -\infty$

b)  $x^{-n}$ ,  $n$  gerade



$x^{-2}$  ;  $x^{-4}$  (gestrichelt)

Eigenschaften:

- Definitionsbereich:  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
- Wertebereich:  $(0; \infty)$
- Monotonie: streng monoton fallend auf  $(0; \infty)$ ,  
streng monoton wachsend auf  $(-\infty; 0)$
- Symmetrie: gerade
- Krümmung: konvex auf  $(0; \infty)$  und auf  $(-\infty; 0)$
- Grenzwerte:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{-n} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{-n} = \lim_{x \rightarrow 0-0} x^{-n} = \infty$

## 2.5 Wurzeln

- Die Gleichung  $x^n = a$  ( $a \geq 0; n \in \mathbb{N}$ ) lässt sich eindeutig nach  $x$  auflösen.
- Diese Lösung bezeichnet man mit  $a^{\frac{1}{n}}$  bzw.  $\sqrt[n]{a}$
- Es gilt also:  $(a^{\frac{1}{n}})^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$
- Speziell:  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$  (Quadratwurzel)

Bsp.: i)  $\sqrt[4]{16} =$     ii)  $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} =$

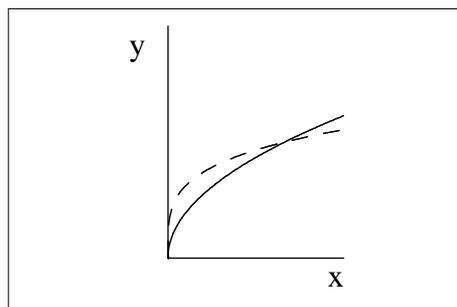
Achtung: i) Ist  $n$  gerade, dann ist  $\sqrt[n]{a}$  für  $a < 0$  (als reelle Zahl) nicht erklärt!

ii) Ist  $n$  ungerade, dann ist  $\sqrt[n]{a}$  für  $a < 0$  durch die eindeutige Lösung der Gleichung  $x^n = a$  erklärt!

Bsp.:  $\sqrt[3]{-8} =$

## 2.6 Die Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{x}$ ( $n \in \mathbb{N}$ )

a)  $\sqrt[n]{x}$ ,  $n$  gerade

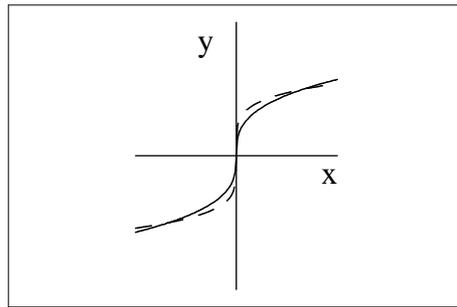


$\sqrt{x}$  ;  $\sqrt[4]{x}$  (gestrichelt)

Eigenschaften:

- Definitionsbereich:  $[0; \infty)$
- Wertebereich:  $[0; \infty)$
- Monotonie: streng monoton wachsend
- Krümmung: konkav
- Grenzwerte:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty$

b)  $\sqrt[n]{x}$ ,  $n$  ungerade



$\sqrt[n]{x}$  ;  $\sqrt[n]{x}$  (gestrichelt)

Eigenschaften:

- Definitionsbereich:  $(-\infty; \infty)$
- Wertebereich:  $(-\infty; \infty)$
- Monotonie: streng monoton wachsend
- Krümmung: konkav auf  $[0, \infty)$ , konvex auf  $(-\infty; 0]$
- Grenzwerte:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$

2.7 Def.:  $a > 0$ ;  $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$

•  $a^{\frac{n}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}}$

Bem.:  $(a^n)^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n$

Bsp.: i)  $(4)^{\frac{5}{2}} =$     ii)  $(\frac{1}{8})^{\frac{2}{3}} =$

2.8 Bem: Für  $a > 0$ ;  $b \in \mathbb{R}$  lässt sich  $a^b$  durch einen Grenzwert definieren.

2.9 Rechenregeln:  $(a, b > 0; n, m \in \mathbb{R})$

i)  $a^n a^m = a^{n+m}$

ii)  $a^n b^n = (ab)^n$

i)  $(a^n)^m = a^{nm}$

Anmerkung: Verwende beim Rechnen mit Wurzeln die Exponentialschreibweise!

i)  $\sqrt[n]{a^b} \sqrt[m]{a^c} = a^{\frac{b}{n}} a^{\frac{c}{m}} = a^{\frac{b}{n} + \frac{c}{m}}$

Bsp.:  $\sqrt{a} \sqrt[3]{a^5} =$

$$\text{ii) } \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\text{Bsp.: i) } \sqrt{a^3} \sqrt{a^5} =$$

$$\text{ii) } \sqrt{3} \sqrt{\frac{4}{3}} =$$

$$\text{Achtung: } \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\text{Bsp.: } \sqrt{a^4} =$$

Achtung: Im Allgemeinen gilt **nicht**  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$   
(Setze z.B.  $a = b = 2$ )

Weitere Bsp.: i)  $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{sofern } n \text{ gerade} \\ -a^n & \text{sofern } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ii)  $a, b > 0$

$$\text{Vereinfache } \sqrt[3]{\sqrt{a^6 b^8}} =$$

iii)  $a, b > 0; x, y, z \in \mathbb{R}$

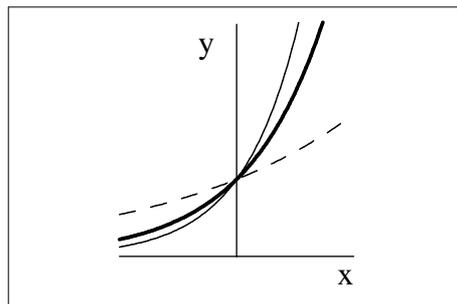
$$\frac{a^{5x-2y}}{b^{6z-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{z-2}} =$$

### 3. Exponentialfunktion, Logarithmus

#### 3.1 Exponentialfunktionen $a^x, a > 0$

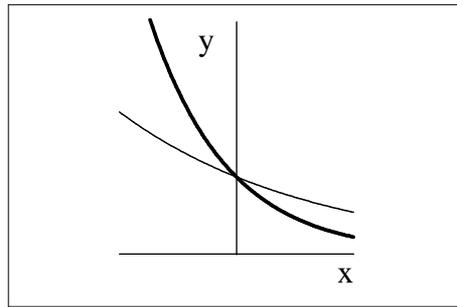
Anmerkung:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718\dots$

Fall 1:  $a > 1$



$e^x$  (dick) ;  $1.5^x$  (gestrichelt);  $4^x$

Fall 2:  $1 > a > 0$



$e^{-x}$ (dick) ;  $1.5^{-x}$

Eigenschaften:  $a > 0$

- Definitionsbereich:  $(-\infty; \infty)$
- Wertebereich:  $(0; \infty)$
- Monotonie: streng monoton wachsend für  $a > 1$   
streng monoton fallend für  $a < 1$
- Krümmung: konvex;
- Grenzwerte:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$  für  $a > 1$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$  für  $a < 1$
- Funktionalgleichung.  $a^x \cdot a^z = a^{x+z}$

### 3.2. Logarithmen

Für  $a, b > 0, a \neq 1$  bezeichnet  $\log_a b$  die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung  $a^x = b$ .

Bsp.: i)  $\log_4 16 =$     ii)  $\log_2 \frac{1}{8} =$     iii)  $\log_5 \sqrt[3]{5} =$

Anmerkung:  $\log_a 1 = 0$ ;  $\log_a a = 1$

Besondere Logarithmen:

i)  $a = e$  ;  $\log_e b = \ln b$  (natürlicher Logarithmus)

ii)  $a = 10$  ;  $\log_{10} b = \lg b$  (dekadischer Logarithmus)

Rechenregeln: ( $u, v > 0, a \neq 1, a > 0$ )

i)  $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$

ii)  $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

iii)  $\log_a u^r = r \log_a u$  ;  $r \in \mathbb{R}$

Bsp.: i)  $\lg 1000 = \lg 10^3 =$

ii)  $\lg 0.01 =$

iii)  $\lg 2 + \lg 5 =$

iv)  $\frac{1}{2} \ln e^2 =$

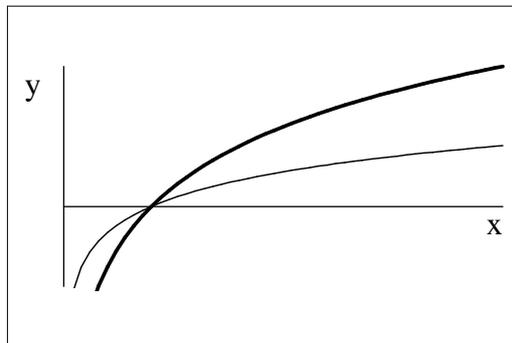
Anmerkung: **Keine** Regeln für  $\log_a(u + v); \log_a(u - v)$  !!

Umrechnen von Logarithmen

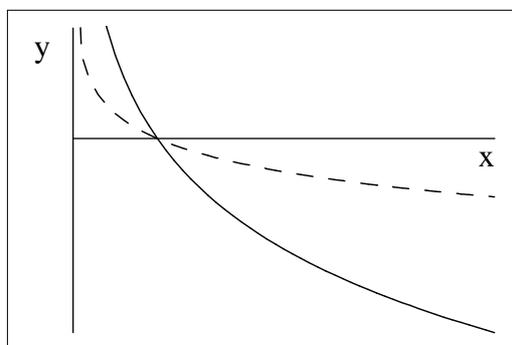
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ insbesondere}$$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

3.3 Logarithmusfunktionen



$\ln x$  (dick);  $\lg x$



$\log_{0.1} x$  (gestrichelt);  $\log_{0.5} x$

Eigenschaften:

- Definitionsbereich:  $(0; \infty)$
- Wertebereich:  $(-\infty; \infty)$
- Monotonie: streng monoton wachsend für  $a > 1$ ,  
streng monoton fallend für  $1 > a > 0$
- Krümmung: konkav für  $a > 1$ , konvex für  $a < 1$
- Grenzwerte:  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$  sofern  $a > 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$  sofern  $1 > a > 0$

Wichtig:  $\log_a x$  und  $a^x$  sind Umkehrfunktionen, d.h

$$a^{\log_a x} = x \text{ sowie } \log_a a^x = x \quad \text{insbesondere}$$

$$\ln e^x = x \text{ sowie } e^{\ln x} = x$$

### 3.4 Logarithmische Gleichungen, Exponentialgleichungen

•  $a^x = y$       $a, y$  bekannt,  $x$  gesucht

Strategie: Gleichung logarithmieren

$$\rightarrow \ln a^x = \ln y$$

$$\rightarrow x \ln a = \ln y$$

$$\rightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a y$$

•  $\log_a x = y$       $a, y$  bekannt,  $x$  gesucht

Strategie: Exponentialfunktion anwenden

$$\rightarrow \log_a x = y$$

$$\rightarrow a^{\log_a x} = a^y$$

$$\rightarrow x = a^y$$

•  $\log_x a = y$       $a, y$  bekannt,  $x$  gesucht

$$\rightarrow \log_x a = \frac{\ln a}{\ln x} = y$$

$$\rightarrow \ln x = \frac{\ln a}{y} = \ln a^{\frac{1}{y}}$$

$$\rightarrow x = a^{\frac{1}{y}}$$

Bsp.: Berechnen Sie  $x$  (sofern möglich)

i)  $2^x = 10$       $\rightarrow$       $x =$

ii)  $4 - 3 \lg(2x) = 10$       $\rightarrow$       $x =$

iii)  $\ln(3 - x^2) = \ln(x - 2)$       $\rightarrow$       $x =$

iv)  $\lg(152 + x^3) = 3 \lg(x + 2)$       $\rightarrow$       $x =$

v)  $\sqrt[3]{e} = 2$       $\rightarrow$       $x =$

## 4. Gleichungen

### 4.1. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

$$\boxed{ax + b = 0} (*) \quad a \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{-b}{a}}$$

Bsp.: i)  $-3x - 2(2x + 1) = 4x - 13 \quad \rightarrow \quad x =$

Manchmal ergibt sich die Form (\*) erst nach Umformungen.

ii)  $\frac{\frac{2}{a} - \frac{2}{x}}{\frac{3}{x}} = 2 \quad (a \neq 0, x \neq 0) \quad \rightarrow \quad x =$

iii)  $\frac{8x + 7}{9x^2 - 4} = \frac{18}{15x - 10} \quad (x \neq \pm \frac{2}{3}) \quad \rightarrow \quad x =$

Probe durchführen!

### 4.2 Quadratische Gleichungen

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad a \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

bzw.

$$\boxed{x^2 + px + q = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Bemerkung: i) Keine (reelle) Lösung sofern  $p^2 - 4q < 0$ .

ii) Eine reelle Lösung (Vielfachheit 2) sofern  $p^2 - 4q = 0$

iii) Zwei verschiedene reelle Lösungen sofern  $p^2 - 4q > 0$

Satz von Vieta: Für die Lösungen  $x_1, x_2$  gilt:

i)  $\boxed{x_1 + x_2 = p}$

ii)  $\boxed{x_1 \cdot x_2 = q}$

Bsp.: i)  $x^2 + ax = 0$

Häufiger Fehler: Lösungen werden "wegdividiert".

Manchmal ergibt sich erst nach Umformungen eine quadratische Gleichung.

ii)  $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6} \quad (x \neq 3)$

iii)  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} + 1 \quad (x \neq \pm 1)$

iv)  $(x - 1)^3 = x^2 - 1$

Probe durchführen!

### Biquadratische Gleichungen

Bsp.:  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Substitution  $z = x^2$

### 4.3 Wurzelgleichungen

Lösungsstrategie: Durch Quadrieren Wurzeln "beseitigen"

Achtung: Probe erforderlich, da durch das Quadrieren möglicherweise die Lösungsmenge verändert wird!

Bsp.: i)  $\sqrt{x} - 6 = 2 \quad (x \geq 0)$

ii)  $\sqrt{x} + 6 = 2 \quad (x \geq 0)$

Eventuell mehrfaches Quadrieren erforderlich!

iii)  $\sqrt{2x + 10} - \sqrt{4x - 8} = 2 \quad (x \geq 2)$

### 4.4 Lineare Gleichungssysteme (2 Gleichungen, 2 Unbekannte)

Lösungsstrategien: Einsetzmethode, Eliminationsmethode

Bsp.:

I.  $2x - y = 1$

II.  $4x + 2y = 0$

## 5. Geometrie

### 5.1 Strahlensatz

### 5.2. Dreiecke

- Winkelsumme:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- Dreiecksungleichungen:  $a < b + c$  bzw.  $b < a + c$  bzw.  $c < a + b$   
sowie:  $|b - c| < a$  bzw.  $|b - a| < c$  bzw.  $|c - a| < b$

Bsp.: i) Ein Dreieck hat die Seitenlängen  $a = 2$  cm und  $b = 0.1$  cm. Geben Sie eine Abschätzung für die Länge der dritten Seite  $c$ .

ii) Gibt es ein Dreieck mit folgenden Seitenlängen?

a)  $a = 4.1 \text{ cm}$ ;  $b = 5.3 \text{ cm}$ ;  $c = 9.6 \text{ cm}$

b)  $a = 3 \text{ cm}$ ;  $b = 2.5 \text{ cm}$ ;  $c = 1.5 \text{ cm}$

### 5.2.1 Spezielle Dreiecke

- Gleichschenkliges Dreieck (2 gleiche Seiten bzw. 2 gleiche Winkel)
- Gleichseitiges Dreieck (3 gleiche Seiten bzw.  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ )
- Rechtwinkliges Dreieck (Ein Winkel gleich  $90^\circ$ , Hypotenuse liegt gegenüber dem rechten Winkel, die beiden restlichen Seiten heißen Katheten)

### 5.2.2 Fläche eines Dreiecks

- Höhe  $h_c$ : Lot vom Eckpunkt  $C$  auf die durch  $A$  und  $B$  bestimmte Gerade.
- Fläche Dreieck =  $\frac{ch_c}{2} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2}$

Spezialfall: Fläche rechtwinkliges Dreieck =  $\frac{1}{2}$  •Produkt der beiden Katheten

Formel von Heron: Mit  $s = \frac{a+b+c}{2}$  ergibt sich die Fläche eines allgemeinen Dreiecks durch  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Bsp.: i) Berechnen Sie die Fläche aus Bsp. ii)b) oben.

ii) Berechnen Sie die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge  $a$ .

### 5.2.3 Satz von Pythagoras

Die Summe der beiden Kathetenquadrate entspricht dem Quadrat der Hypotenuse.

Bsp.: Der Querschnitt eines Tunnels ist ein Halbkreis mit Durchmesser 6 m. Am linken und am rechten Rand sind Gehsteige der Breite 1 m abgetrennt. Wie hoch darf ein Fahrzeug höchstens sein, damit es den Tunnel gefahrlos passieren kann?

## 5.3 Winkelfunktionen

### 5.3.1 Winkel

- mathematisch positiver Sinn: Gegen den Uhrzeigersinn.

Winkelmessung im

- Gradmaß (DEG), Vollwinkel  $360^\circ$  oder
- Bogenmaß (RAD), Vollwinkel  $2\pi$

Umrechnung:

- Gradmaß in Bogenmaß:  $\alpha^\circ$  entspricht  $\frac{\alpha}{180}\pi$
- Bogenmaß in Gradmaß:  $x$  entspricht  $\frac{x}{\pi}180^\circ$

Bsp.: Rechnen Sie um

- i)  $90^\circ$    ii)  $-45^\circ$    iii)  $120^\circ$    iv)  $\frac{\pi}{12}$    v)  $\frac{\pi}{3}$

### 5.3.2 Definition von $\sin \alpha, \cos \alpha$ am Einheitskreis

Es lassen sich zahlreiche Werte der Winkelfunktionen sowie Formeln ableiten.

Für jeden Winkel  $\alpha$  gilt:

- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$  und  $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$  und  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$  und  $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

### 5.3.3 $\sin \alpha, \cos \alpha$ am rechtwinkligen Dreieck

- $\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \rightarrow \text{Gegenkathete} = \sin \alpha \cdot \text{Hypotenuse}$
- $\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \rightarrow \text{Ankathete} = \cos \alpha \cdot \text{Hypotenuse}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

### 5.3.4 Sinus- und Cosinussatz im allgemeinen Dreieck

Sinussatz:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

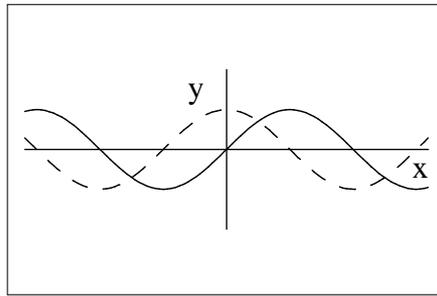
Bem.: Sollen mit Hilfe des Sinussatzes Winkel im Dreieck berechnet werden, muss darauf geachtet werden, dass es im Intervall  $[0^\circ; 180^\circ]$  im Allgemeinen zwei verschiedene Winkel mit demselben Sinuswert gibt.

Cosinussatz:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  bzw.  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$  bzw.  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Bsp.: Gegeben ist ein Dreieck mit  $\alpha = 30^\circ, \beta = 20^\circ$  und  $c = 2$

$\gamma = ?, a = ? b = ?$

### 5.3.5 Die Funktionen $\sin x, \cos x$



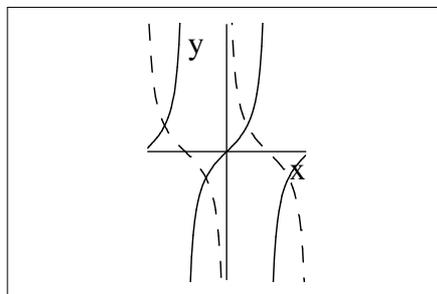
$\sin x, \cos x$  (gestrichelt)

Eigenschaften:

- Definitionsbereich:  $(-\infty; \infty)$
- Wertebereich:  $[-1, 1]$
- Periode:  $2\pi$
- Symmetrie:  $\sin x$  ungerade,  $\cos x$  gerade
- Nullstellen:  $\{0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots\}$  ( $\sin x$ )  
 $\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots\}$  ( $\cos x$ )

### 5.3.6 Die Funktionen $\tan x, \cot x$

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$



$\tan x, \cot x$  (gestrichelt)

Eigenschaften:

- Definitionsbereich:  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots\}$  ( $\tan x$ )  
 $\mathbb{R} \setminus \{0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots\}$  ( $\cot x$ )
- Wertebereich:  $(-\infty; \infty)$
- Periode:  $\pi$
- Symmetrie: ungerade
- Nullstellen:  $\{0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots\}$  ( $\tan x$ )  
 $\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots\}$  ( $\cot x$ )

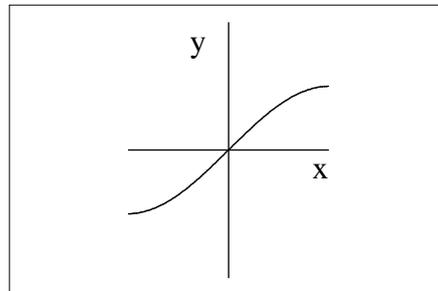
### 5.3.7 $\tan \alpha, \cot \alpha$ am rechtwinkligen Dreieck

- $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
- $\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$

### 5.3.8 Weitere Gleichungen aus der Formelsammlung

- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

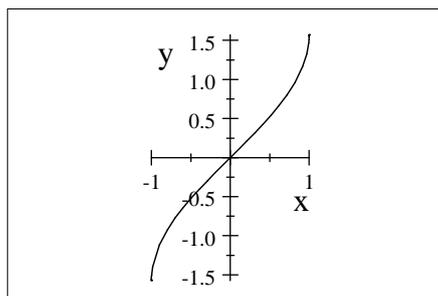
### 5.3.9 Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen



$\sin x$  auf  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Die Gleichung  $\sin x = b$  ( $-1 \leq b \leq 1$ ) hat auf dem Intervall  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  eine eindeutig bestimmte Lösung die wir mit  $\arcsin b$  (TR  $\sin^{-1}b$ ) bezeichnen.

### Die Funktion Arkussinus ( $\arcsin x$ )



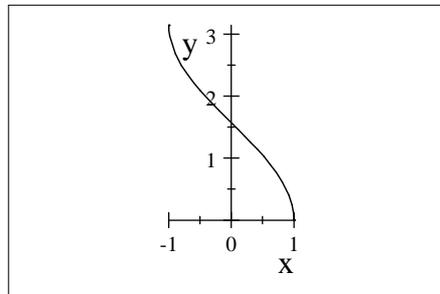
$\arcsin x$

Eigenschaften:

- Definitionsbereich:  $[-1; 1]$
- Wertebereich:  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
- Monotonie: streng monoton wachsend
- Symmetrie: ungerade
- Krümmung: konkav auf  $[-1; 0]$ , konvex auf  $[0; 1]$
- Wendepunkt:  $x = 0$
- Nullstelle:  $x = 0$

## Die Funktion Arkuscosinus ( $\arccos x$ )

Die Gleichung  $\cos x = b$  ( $-1 \leq b \leq 1$ ) hat auf dem Intervall  $[0; \pi]$  eine eindeutig bestimmte Lösung die wir mit  $\arccos b$  (TR  $\cos^{-1}b$ ) bezeichnen.



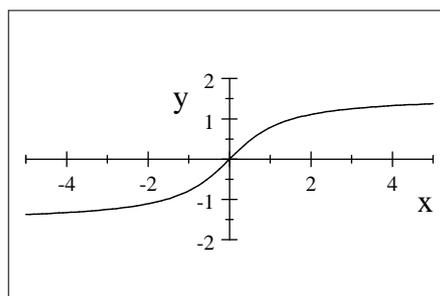
$\arccos x$

Eigenschaften:

- Definitionsbereich:  $[-1; 1]$
- Wertebereich:  $[0; \pi]$
- Monotonie: streng monoton fallend
- Krümmung: konvex auf  $[-1; 0]$ , konkav auf  $[0; 1]$
- Wendepunkt:  $x = 0$
- Nullstelle:  $x = 1$

## Die Funktion Arkustangens ( $\arctan x$ )

Die Gleichung  $\tan x = b$  ( $b \in \mathbb{R}$ ) hat auf dem Intervall  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  eine eindeutig bestimmte Lösung die wir mit  $\arctan b$  (TR  $\tan^{-1}b$ ) bezeichnen.



$\arctan x$

Eigenschaften:

- Definitionsbereich:  $(-\infty; \infty)$
- Wertebereich:  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
- Monotonie: streng monoton wachsend
- Symmetrie: ungerade
- Krümmung: konvex auf  $(-\infty; 0]$ , konkav auf  $[0; \infty)$
- Wendepunkt:  $x = 0$

- Nullstelle:  $x = 0$
- Grenzwerte:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

Bemerkung: Es gilt ("Funktion und Umkehrfunktion heben sich in ihrer Wirkung auf")

- $\sin(\arcsin x) = x$  für  $x \in [-1; 1]$  sowie  $\arcsin(\sin x) = x$  für  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
- $\cos(\arccos x) = x$  für  $x \in [-1; 1]$  sowie  $\arccos(\cos x) = x$  für  $x \in [0; \pi]$
- $\tan(\arctan x) = x$  für  $x \in \mathbb{R}$  sowie  $\arctan(\tan x) = x$  für  $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

### 5.3.10 Gleichungen mit Winkelfunktionen

a) Bestimme alle Lösungen der Gleichung  $\sin x = b$  ( $-1 \leq b \leq 1$ )

Lösung:  $x_1 = \arcsin(b)$ ;  $x_2 = \pi - x_1$

Gesamte Lösungsmenge:  $\{x_1, x_1 \pm 2\pi; x_1 \pm 4\pi, \dots\} \cup \{x_2, x_2 \pm 2\pi; x_2 \pm 4\pi, \dots\}$

b) Bestimme alle Lösungen der Gleichung  $\cos x = b$  ( $-1 \leq b \leq 1$ )

Lösung:  $x_1 = \arccos(b)$ ;  $x_2 = -x_1$

Gesamte Lösungsmenge:  $\{x_1, x_1 \pm 2\pi; x_1 \pm 4\pi, \dots\} \cup \{x_2, x_2 \pm 2\pi; x_2 \pm 4\pi, \dots\}$

c) Bestimme alle Lösungen der Gleichung  $\tan x = b$  ( $b \in \mathbb{R}$ )

Lösung:  $x_1 = \arctan(b)$

Gesamte Lösungsmenge:  $\{x_1, x_1 \pm \pi; x_1 \pm 2\pi, \dots\}$

Bsp.: Bestimmen Sie alle Lösungen von  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

## 6. Funktionen

### 6.1 Grundbegriffe

- $D$  bezeichnet eine Teilmenge der reellen Zahlen
- Eine Funktion  $f$  auf  $D$  ist eine Vorschrift, die jedem  $x \in D$  genau eine reelle Zahl  $y$  zuordnet.

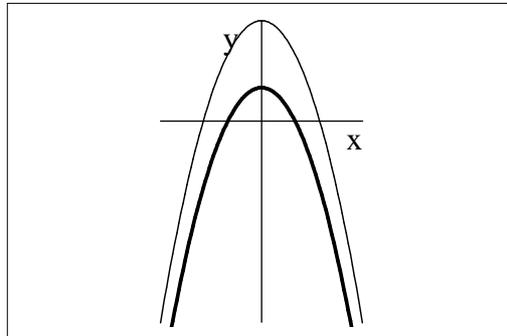
Schreibweise:  $y = f(x)$  ( $x$  heißt unabhängige,  $y$  heißt abhängige Variable)

- $D$  heißt Definitionsbereich,  $W = \{f(x) : x \in D\}$  Wertemenge von  $f$ .

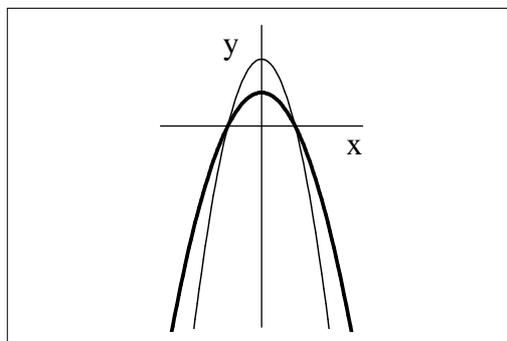
Bem.: Auch  $y = f(t)$  oder  $x = f(t)$  usw. möglich.

## 6.2. Graph einer Funktion

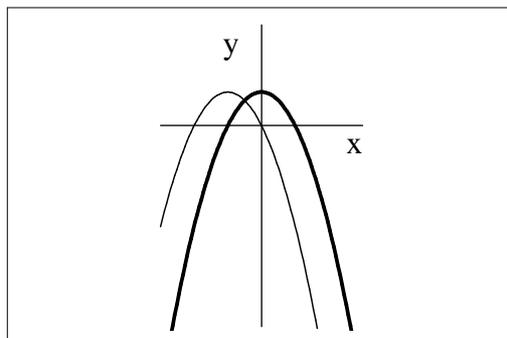
Veranschaulichung einer Funktion erfolgt durch den Graphen  $\{(x, f(x)) : x \in D\}$  in der Zahlenebene.



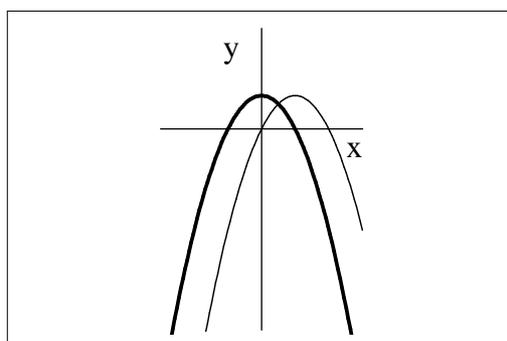
$f(x)$  (dick),  $f(x) + a$  ( $a > 0$ )



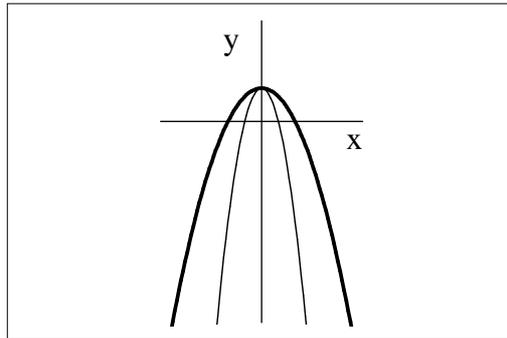
$f(x)$  (dick),  $af(x)$  ( $a > 0$ )



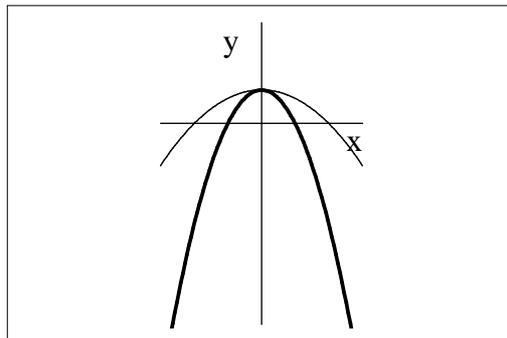
$f(x)$  (dick),  $f(x + a)$  ( $a > 0$ )



$f(x)$  (dick),  $f(x - a)$  ( $a > 0$ )



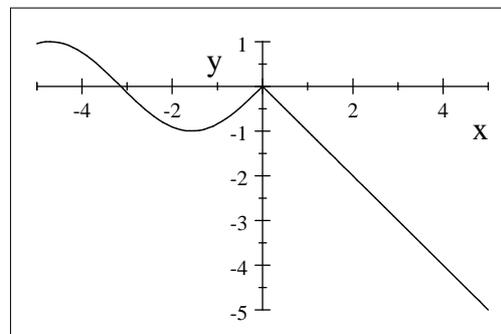
$f(x)$  (dick),  $f(ax)$  ( $a > 1$ )



$f(x)$  (dick),  $f(ax)$  ( $0 < a < 1$ )

Bsp.: Skizzieren Sie die Funktion  $y = -\ln(x - 1)$  ausgehend von  $y = \ln x$  mit dem Zwischenschritt  $y = \ln(x - 1)$

### 6.1.2 Abschnittsweise definierte Funktionen



$\sin x$  für  $x < 0$ ,  $-x$  für  $x > 0$

### 6.1.3 Verkettung (Hintereinanderausführung) von Funktionen

- $f(x)$  hat Definitionsbereich  $D_f$  und Wertebereich  $W_f$   
 $g(x)$  hat Definitionsbereich  $D_g$  und Wertebereich  $W_g$

Falls  $W_g \subset D_f$ , so heißt die Funktion  $y = f(g(x))$  Verkettung von  $f$  und  $g$ .

- $f(x)$  heißt auch äußere und  $g(x)$  innere Funktion.

- Bsp.: i) Bestimmen Sie den maximalen Definitions- und Wertebereich von  $\sin(\ln x)$ .  
 ii) Bestimmen Sie einen sinnvollen Definitionsbereich von  $\ln(\sin x)$  sowie den zugehörigen Wertebereich.

## 6.2 Eigenschaften von Funktionen

### Monotonie

Folgt aus  $x_2 > x_1$  stets  $f(x_2) > f(x_1)$  (bzw.  $f(x_2) < f(x_1)$ ) so heißt  $f(x)$  streng monoton wachsend (bzw. fallend).

### Symmetrie

Gilt für alle  $x$  stets  $f(-x) = f(x)$  (bzw.  $f(-x) = -f(x)$ ) so heißt  $f(x)$  gerade (bzw. ungerade).

### Krümmung

Liegt die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten auf dem Graphen von  $f(x)$  immer oberhalb (bzw. unterhalb) des Graphen, so heißt  $f(x)$  konvex (bzw. konkav).

### Wendepunkt

Wechsel des Krümmungsverhaltens

## 6.3 Umkehrfunktion

- Lässt sich die Gleichung  $y = f(x)$  für jedes  $y \in W_f$  eindeutig nach  $x$  auflösen, so bezeichnet man die Lösung mit  $x = f^{-1}(y)$ . Indem man jedem  $y \in W_f$  den Wert  $f^{-1}(y)$  zuordnet erhält man die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  mit Definitionsbereich  $W_f$  und Wertebereich  $D_f$ .

Bem.: Man schreibt wieder  $f^{-1}(x)$  statt  $f^{-1}(y)$ .

- Wertebereich von  $f(x) =$  Definitionsbereich von  $f^{-1}(x)$   
 Wertebereich von  $f^{-1}(x) =$  Definitionsbereich von  $f(x)$
- Man erhält den Graphen von  $f^{-1}(x)$  indem man den Graphen von  $f(x)$  an der Winkelhalbierenden des 1./3. Quadranten spiegelt.
- Es gilt:  $f^{-1}(f(x)) = x$  und  $f(f^{-1}(x)) = x$
- Jede streng monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion besitzt eine Umkehrfunktion.

Bsp.: Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von  $f(x) = e^{2x} + 1$

## 6.4. Weitere Beispiele von Funktionen

### 6.4.1 Lineare Funktionen

- Allgemeine Form:  $ax + dy + c = 0$
  - bzw.  $y = -\frac{a}{d}x - \frac{c}{d}$  (sofern  $d \neq 0$ )
- Normalform:  $y = f(x) = mx + b$
- $m$  Anstieg,  $b$  Achsenabschnitt
  - Graph: Gerade

#### a) Punktgleichung

Gegeben: Anstieg  $m$  und Punkt  $P = (x_1; y_1)$  auf der Gerade

$$\rightarrow y = mx + y_1 - mx_1$$

#### b) Zweipunktgleichung

Gegeben: Zwei verschiedene Punkte  $P_1 = (x_1; y_1)$  und  $P_2 = (x_2; y_2)$  auf der Gerade.

$$\rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ (Rest wie in a)}$$

#### c) Achsenabschnittsform

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \cdot b \neq 0) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{b}{a}x + b$$

Bsp.: Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden die die Punkte  $(1; 3)$  und  $(2; 0)$  enthält.

### 6.4.2 Parabeln

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Bem.: Parabel ist nach oben (bzw. unten) geöffnet sofern  $a > 0$  (bzw.  $a < 0$ )

Bem.: Durch quadratische Ergänzung lässt sich jede Parabel auf die Scheitelpunktform  $y = a(x - x_s) + y_s$  bringen. Der Punkt  $(x_s; y_s)$  heißt Scheitelpunkt.  $y_s$  ist der größte ( $a < 0$ ) bzw. kleinste ( $a > 0$ ) Funktionswert.

Bsp.: Bringe  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$  auf Scheitelpunktform.

## 6.5 Grenzwerte von Funktionen

Definition: i)  $g \in \mathbb{R}$  heißt rechtsseitiger (bzw. linksseitiger) Grenzwert von  $f(x)$  in  $x = a$ , falls es zu jeder (noch so kleinen) Zahl  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\varepsilon) > 0$  gibt, so dass gilt:

$$f(x) \in (g - \varepsilon, g + \varepsilon) \text{ für jedes } x \in (a; a + \delta(\varepsilon)) \text{ (bzw. } x \in (a - \delta(\varepsilon); a))$$

Bezeichnung:  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = g$  (rechtsseitiger Grenzwert) bzw.  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = g$  (linksseitiger Grenzwert)

ii)  $g \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert von  $f(x)$  in  $x = a$ , falls  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = g$

Bezeichnung:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$

Bem.: Sofern  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$  (oder  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = g$  oder  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = g$ ) existiert, so ist  $g$  eindeutig bestimmt.

Definition:  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ , falls es zu jeder (noch so großen) Zahl  $K$  eine Zahl  $\delta(K) > 0$  gibt, so dass gilt:

$$f(x) \in (K, \infty) \text{ f\u00fcr jedes } x \in (a; a + \delta(K))$$

Bsp.:  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = \infty$

Definition: i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$  sofern es zu jeder (noch so kleinen) Zahl  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\varepsilon)$  gibt, so dass gilt:

$$f(x) \in (g - \varepsilon, g + \varepsilon) \text{ f\u00fcr jedes } x \in (\delta(\varepsilon); \infty)$$

Bsp.:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

Die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  usw. werden analog definiert.

Bemerkung: Meistens "sieht" man den Grenzwert von Funktionen, aber existiert z.B.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \cos \frac{1}{x} ?$$

### 6.5.1 Rechenregeln

Gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , so folgt:

i)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$

ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

iii)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$  sofern  $B \neq 0$

Bemerkung: i) Die gleichen Regeln gelten f\u00fcr  $x \rightarrow a+0$ ;  $x \rightarrow a-0$ ;  $x \rightarrow \infty$ ;  $x \rightarrow -\infty$

ii) Die Regeln gelten auch f\u00fcr die Symbole  $\infty$  und  $-\infty$ , sofern man damit vern\u00fcnftig rechnet, z.B. ( $A \in \mathbb{R}$ )

•  $A \pm \infty = \pm \infty$

- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $A \cdot \infty = \begin{cases} \infty & \text{falls } A > 0 \\ -\infty & \text{falls } A < 0 \end{cases}$
- $\frac{A}{\infty} = 0$

Keine allgemein gültigen Aussagen sind möglich für

- " $\frac{\infty}{\infty}$ "; " $\infty - \infty$ "; " $0 \cdot \infty$ "

Bsp.: i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 1000x^2 + 1 =$

ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 1000x^2 + 1 =$

iii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^3 - 1} =$

iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x - 1} =$

## 6.6 Gebrochen rationale Funktionen

- Betrachten  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

wobei  $p(x)$  Polynom vom Grad  $n$  und  $q(x)$  Polynom vom Grad  $m$ .

Wir nehmen an, dass  $m > n$ .

Bsp.:  $r(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$  (\*)

- Definitionsbereich  $D$  von  $r(x)$ : Alle  $x$  mit  $q(x) \neq 0$

Bsp.:  $D$  im Bsp. (\*)

- Haben Zähler und Nenner gemeinsame Nullstellen, so wird der Linearfaktor  $x - a$  so oft wie möglich gekürzt.

Bsp. Gekürzte Form von (\*)

- Ergebnis (nach vollständigem Kürzen): Die verbleibenden Nullstellen des Nenners sind die "echten" Definitionslücken (Pole) von  $r(x)$ .

Die restlichen "vollständig weggekürzten Nullstellen" des Nenners heißen hebbare Singularitäten von  $r(x)$ .

Bsp.: Bestimme Pole und hebbare Singularitäten Bsp. (\*).

## 7. Differenzierbare Funktionen

Gegeben: Eine Funktion  $g(x)$  auf einem Intervall  $(a; b)$  und ein Punkt  $x_0 \in (a; b)$

Def.: i)  $g$  heißt in  $x_0$  differenzierbar, sofern der Grenzwert

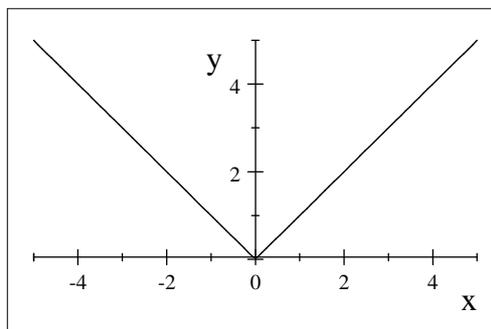
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \text{ existiert.}$$

Der Grenzwert heißt erste Ableitung oder Differentialquotient von  $g$  in  $x_0$  und wird mit  $g'(x_0)$  oder  $\frac{dg}{dx}(x_0)$  bezeichnet.

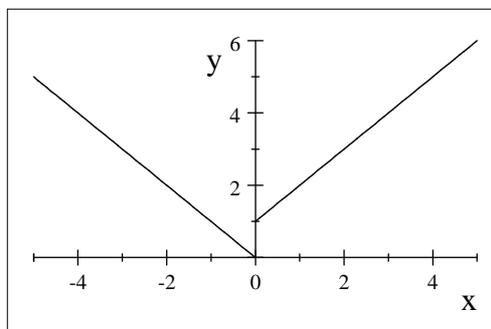
ii)  $g$  heißt differenzierbar sofern  $g$  in jedem Punkt des Definitionsbereichs  $(a; b)$  differenzierbar ist. In diesem Fall erhält man die Funktion  $g'$  (Erste Ableitung von  $g$ ).

Bem.: i) Ist auch  $g'$  differenzierbar, so erhält man  $g'' = (g')'$ , die man als zweite Ableitung von  $g$  bezeichnet usw..

ii) Funktionen mit "Knickstellen" oder Sprungstellen sind dort nicht differenzierbar.



Knickstelle bei  $x = 0$



Sprungstelle bei  $x = 0$

## 7.2. Ableitungen von einigen Grundfunktionen

$g(x)$	$g'(x)$
$x^r (r \in \mathbb{R})$	$rx^{r-1}$
$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

### 7.3 Rechenregeln

Sind die Funktionen  $h$  und  $g$  differenzierbar auf  $(a, b)$ , so gilt:

- Summenregel:  $(h(x) + g(x))' = h'(x) + g'(x)$
- Produktregel:  $(h(x)g(x))' = h'(x)g(x) + h(x)g'(x)$
- (Insbesondere:  $(cg(x))' = cg'(x)$ )
- Quotientenregel:  $\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)' = \frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{g^2(x)}$
  
- Kettenregel:  $h(g(x))' = h'(g(x))g'(x)$   
sofern  $h$  und  $g$  differenzierbar sind und  $h(g(x))$  gebildet werden kann
  
- Ableitung der Umkehrfunktion:  $g^{-1}(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$  (sofern  $g'(x)$  keine Nullstelle hat)

### 8. Anwendungen der Differentialrechnung

#### 8.1. Gleichung der Tangente

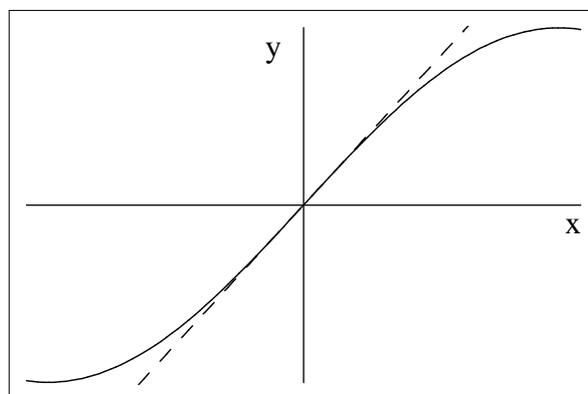
Ist  $g$  in  $x_0$  differenzierbar, so heißt die Gerade, die durch

$$y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$$

definiert wird, Tangente an den Graphen von  $g$  in  $(x_0; g(x_0))$ .

Bem.: i) Die Tangente hat also den Anstieg  $m = g'(x_0)$  und geht durch den Punkt  $(x_0; g(x_0))$ . "Sie ist die Gerade, die sich in  $(x_0; g(x_0))$  am besten an den Graphen von  $g$  anpasst."

ii) Für sehr kleine Werte  $dx$  unterscheiden sich die Funktionswerte  $g(x_0 + dx)$  und die Werte auf der Tangente  $y(x_0 + dx)$  kaum. Es gilt also  $g(x_0 + dx) - g(x_0) \approx y(x_0 + dx) - y(x_0) = g'(x_0)dx$



Tangente an  $\sin x$  in  $(0; 0)$

## 8.2 Kurvendiskussion (von differenzierbaren Funktionen)

### 8.2.1 Monotonie

Ist  $g'(x) > 0$  (bzw.  $g'(x) < 0$ ) auf  $(a, b)$ , so ist  $g$  dort streng monoton wachsend (bzw. fallend).

### 8.2.2 Lokale Extremwerte

#### 1. Möglichkeit

- $g$  hat in  $x_0$  einen lokalen Extremwert, sofern  $g'$  "dort sein Vorzeichen ändert"

Genauer: Gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass

$g'(x) > 0$  auf  $(x_0 - \varepsilon; x_0)$  und  $g'(x) < 0$  auf  $(x_0; x_0 + \varepsilon)$ , so hat  $g$  in  $x_0$  ein lokales Maximum.

Falls  $g'(x) < 0$  auf  $(x_0 - \varepsilon; x_0)$  und  $g'(x) > 0$  auf  $(x_0; x_0 + \varepsilon)$ , so hat  $g$  in  $x_0$  ein lokales Minimum.

#### 2. Möglichkeit

- $g$  hat in  $x_0$  einen lokalen Extremwert, sofern  $g'(x_0) = 0$  und  $g''(x_0) \neq 0$ .

Genauer: Gilt  $g'(x_0) = 0$  und  $g''(x_0) > 0$ , so hat  $g$  in  $x_0$  ein lokales Minimum.

Falls  $g'(x_0) = 0$  und  $g''(x_0) < 0$ , so hat  $g$  in  $x_0$  ein lokales Maximum.

Bem.:  $g'(x_0) = 0$  ist notwendig, aber nicht hinreichend für einen lokalen Extremwert.

### 8.3.3 Krümmung

Ist  $g''(x) > 0$  (bzw.  $g''(x) < 0$ ) auf  $(a, b)$ , so ist  $g$  dort streng konvex (bzw. konkav).

### 8.3.4 Wendepunkt

#### 1. Möglichkeit

- $g$  hat in  $x_0$  einen Wendepunkt, sofern  $g''$  "dort sein Vorzeichen ändert"

#### 2. Möglichkeit

- $g$  hat in  $x_0$  einen Wendepunkt, sofern  $g''(x_0) = 0$  und  $g'''(x_0) \neq 0$

Bem.:  $g''(x_0) = 0$  ist notwendig, aber nicht hinreichend für einen Wendepunkt.