HOCHSCHULE ZITTAU/GÖRLITZ
GRUNDLAGENKURS MATHEMATIK
PROF. DR. U. SCHNELL

Aufgaben

Kapitel 1: Grundrechenarten

Zahlenbereiche:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	Ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen (Brüche)
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen

1) Erzeugen Sie Produkte, indem Sie gemeinsame Faktoren ausklammern:

(a) $a + a^2$ (b) $a^2b + ab^2$ (c) $ab + ac - ad$ (d)* $ab - ac - b + c$

(e)* $8ab + 20b^2$ (f)* $a(2b + 3) + 4(2b + 3)$ (g) $2a + 2 + 3b(a + 1)$

Rechnen mit Klammern:

Addition: $a + (b + c - d) = a + b + c - d$ (Weglassen)

Subtraktion: $a - (b + c - d) = a - b - c + d$ (Vorzeichen umkehren)

Multiplikation: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ (Jedes mit jedem)

Binomische Formeln:

(1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2) Lösen Sie die folgenden Klammern auf:

(a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$ (b)* $5a + (7c - (2a - 3b)) - (4c - a + b)$

3) Lösen Sie die folgenden Klammern auf:

(a)* $(2a-b)(9a+4b)$ (b) $(a+b)(c-d)-(a-b)(c+d)$ (c)* $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

4) Verwandeln Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der binomischen Formeln als Produkte:

(a) $x^2+2xy+y^2$ (b)* $49x^2+14xy+y^2$ (c) $16x^2-16xy+4y^2$

(d)* $4u^2-9v^2$ (e) $4u^2+20uv+25v^2-u^2$

5) Ordnen Sie die Symbole gemäß der binomischen Formeln zu:

(a) $(3x+\square)^2=9x^2+30x+25$ (b)* $(\square+3w)^2=4u^2v^2+12uvw+\bigcirc$

(c)* $(0.5x+\square)^2=\bigcirc+xy+\triangledown$ (d) $(5u^2+\square)(5u^2-\square)=\bigcirc-49v^2w^4$

Hinweis: Erst binomische Formeln anwenden, dann entsprechende Ausdrücke links und rechts vergleichen

Bruchrechnung:

Kürzen: $\dfrac{a\cdot c}{b\cdot c}=\dfrac{a}{b}$

Erweitern: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot c}$

Addition (gleichnamig): $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}$ (Zähler addieren)

Add. (allg.): z.B. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{9}{12}+\dfrac{10}{12}=\dfrac{19}{12}$ (auf **Hauptnenner** erweitern)

Hauptnenner = kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) der Nenner

Multiplikation: $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$ (Nenner · Nenner, Zähler · Zähler)

Division: $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$ (mit Kehrwert malnehmen)

6) Geben Sie (ohne Taschenrechner) an, welche der Zahlen a und b die größere ist:

(a) $a=\dfrac{13}{17},\ b=\dfrac{169}{289}$ (b) $a=\dfrac{11}{21},\ b=\dfrac{121}{231}$ (c) $a=-\dfrac{13}{12},\ b=-\dfrac{143}{130}$

7) Kürzen Sie folgende Brüche:

(a)* $\dfrac{64}{24}$ (b) $\dfrac{6732}{20196}$ (c) $\dfrac{63a^2b}{14ab^2}$ (d)* $\dfrac{12xy-4yz}{16xz+8xy}$ (e) $\dfrac{63a^2b^2-9ab}{18ab+27a^2b^2}$

8) Addieren bzw. subtrahieren Sie folgende Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich.

(a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$ (b)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ (c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{3}{8}$ (d)* $\frac{2}{a+1}+\frac{1}{3a+3}-\frac{4}{a+1}$

(e) $\frac{3a}{6ab}-\frac{7b}{3a}+\frac{2ab}{4}$ (f)* $\frac{2y}{3z+6}-\frac{1-y}{z+2}+\frac{3x-2xy}{3xz+6x}$

9) Multiplizieren bzw. dividieren Sie folgende Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich.

(a)* $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$ (b) $\frac{10}{7}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}$ (c)* $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$ (d)* $\frac{35xy^2}{8x-4y}\cdot\frac{4x-2y}{70xy^2}$ (e) $\frac{3y^2}{3x+1}:\frac{6y^2}{12x+4}$

10) Ein Scheich bestimmt in seinem Testament die folgende Aufteilung seines Vermögens unter seinen drei Söhnen: der älteste Sohn erhält die Hälfte, der mittlere ein Drittel und der jüngste ein Neuntel. Nach dem Ableben des Scheiches versuchen die Söhne, die n geerbten Kamele testamentsgemäß aufzuteilen. Dies gelingt jedoch nicht, ohne ein Kamel zu schlachten. In der Not erscheint ein Fremder und bietet den Söhnen sein Kamel an. Nun geht die Rechnung auf und es bleibt sogar ein Kamel übrig, das dem hilfsbereiten Fremden mit Dank zurück gegeben wird.

Wie viele Kamele hatte der Scheich?

Kapitel 2: Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzregeln:

$a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}:\quad a^n := \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n},\qquad$ (**Basis** a, **Exponent** n)

(1) $a^n\cdot a^m = a^{m+n}$

(2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a\neq 0)$

(3) $a^n\cdot b^n = (ab)^n$

(4) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (b\neq 0)$

(5) $(a^m)^n = a^{mn}$

(6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a\neq 0)$

11) Schreiben Sie als eine Potenz:

(a) $(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})$ (b)* $-\left(\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\right)$

(c) $(b-a)(a-b)(a-b)$ (d)* $-(a^0b)\cdot(a^0b)\cdot(a^0b)\cdot(a^0b)$

12) Berechnen Sie: (a) -3^4 (b)* $(-5)^3$ (c) $(-2^{-1})^3$ (d)* $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

13) Vereinfachen Sie:

(a)* $\dfrac{a^{n+1}\cdot a^{n+1}\cdot a^n}{a^n\cdot a^0\cdot a^{n-1}}$ (b) $\dfrac{3\,a^{n+1}\cdot 6\,c^{n+7}\cdot 9\,b^{m+1}}{3\,c^n\cdot 2\,b^{m+1}\cdot 3\,a}$ (c)* $\dfrac{a^{-2}\cdot x^{-4}\cdot y^{-6}}{b^3\cdot c^{-4}\cdot z^{-5}} : \dfrac{a^{-3}\cdot b^{-5}\cdot x^{-3}}{c^{-5}\cdot y^6\cdot z^{-7}}$

> **Wurzeln:**
>
> $a>0$: $\sqrt[n]{a}$ = eindeutig bestimmte positive Lösung von $x^n=a$
>
> $n=2$: $\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$ Quadratwurzel
>
> Umwandlung in eine Potenz: $\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$
>
> Obige Potenzregeln gelten auch für Potenzen $r,s\in\mathbb{R}$, z.B. $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$
>
> Für Wurzeln gilt z. B. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

14) Berechnen Sie folgende Wurzeln:

(a)* $\sqrt{1}$ (b) $\sqrt[4]{1}$ (c)* $\sqrt{64}$ (d)* $\sqrt[3]{64}$ (e)* $\sqrt{(-2)^2}$ (f) $\sqrt{9+16}$ (g) $\sqrt{9}+\sqrt{16}$

15) Vereinfachen Sie :

(a)* $\sqrt{\sqrt{81}}$ (b) $\sqrt{0.04^5}$ (c)* $\sqrt{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$ (d) $\sqrt[3]{\dfrac{a^6}{3}+\sqrt{\left(\dfrac{a^6}{3}\right)^2+\dfrac{a^{12}}{3}}}$

> **Teilweise Wurzeln ziehen:**
>
> $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$, z.B. $\sqrt{80}=\sqrt{5\cdot 16}=4\sqrt{5}$

16) Fassen Sie zusammen:

(a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$ (b)* $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$ (c)* $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{7\cdot 5}$

> **Logarithmus (Definition):**
>
> $a,b>0$, $a\neq 1$: die eind. bestimmte positive Lösung von $a^x=b$ ist $\log_a(b)$.
>
> Also: a,b gegeben. Gesucht: a hoch **wie viel** ist b ?
>
> Bez.: $\log_a(b)$ ist **Logarithmus** von b zur Basis a

Spezielle Basen:

$a = e$	$\log_e(x) = \ln(x)$	Natürlicher Logarithmus
$a = 10$	$\log_{10}(x) = \lg(x)$	Dekadischer Logarithmus
$a = 2$	$\log_2(x) = \operatorname{ld}(x)$	Binärer Logarithmus

($e = 2.71828\ldots$ ist die Eulersche Zahl)

17) Wenden Sie die Definition des Logarithmus an, um x zu ermitteln!

Hinweis: Stellen Sie dazu die zugehörige Grundgleichung $a^n = b$ auf.

(a) $x = \log_4(4)$ (b)* $x = \operatorname{ld}(4)$ (c) $x = \log_3(81)$ (d)* $x = \log_5\left(\frac{1}{25}\right)$

(e) $\operatorname{ld}(x) = -2$ (f)* $\ln(x) = 1$ (g)* $\lg(x) = 3$

(h)* $\log_x(4) = -1$ (i) $\log_x(64) = 3$ (j)* $\log_x\left(\frac{1}{9}\right) = -2$

Logarithmus (Regeln):

Für beliebige Basis $a > 0$, $a \neq 1$ und $u, v > 0$ gilt:

(1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

(2) $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

(3) $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u), \quad (r \in \mathbb{R})$

18) Vereinfachen Sie

(a)* $\lg\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$ (b) $\ln(\sqrt[7]{a^5})$ (c)* $\lg\left(\frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}\right)$

19) Fassen Sie folgende Ausdrücke zu einem Logarithmus zusammen:

(a)* $\ln(3)+\ln(4)-\ln(6)$ (b) $5\lg(a)+\lg(a^2)-\lg(a^3)$ (c)* $\ln(2x)+\ln(4x)-\ln(8x)$

20) Tierschützer befürchten, dass die Population einer seltenen Tierart in den nächsten 10 Jahren auf zwei Drittel ihres heutigen Bestandes zurück geht. Ein Forscher behauptet, dass diese Population jährlich um 4% abnimmt. Decken sich die beiden Aussagen?

21) Die Oberfläche eines Würfels beträgt 96cm^2. Wie lang sind seine Kanten?

22)* Ein Neuwagen verliert jährlich 25 Prozent seines Wertes. Wie viel ist das Auto, das neu 20.000 Euro kostet, nach 3 Jahren noch wert?

Kapitel 3: Gleichungen

23) Lösen Sie folgende lineare Gleichungen:

(a)* $3x - 9 = 0$ (b) $5x + 12 = 3x + 8$ (c)* $2(4x - 3) + 5(3x + 1) = 6(2x + 9)$

24) Geben Sie die Lösungen folgender quadratischer Gleichungen ggf. mit Hilfe der binomischen Formeln an:

(a)* $x^2 - 9 = 0$ (b) $(x - 2)(x + 3) = 0$ (c)* $x^2 - 5x = 0$ (d) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Quadratische Gleichungen:

Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q$ hat die Lösung(en)

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}}$$

$D > 0 \;\rightarrow\;$ 2 Lösungen, $D = 0 \;\rightarrow\;$ 1 Lösung, $D < 0 \;\rightarrow\;$ keine Lösung

25) Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen mit Hilfe der pq-Formel:

(a)* $x^2 + 10x + 50 = 0$ (b) $(x - 3)^2 - x - 20 = x + 37$ (c)* $4x^2 - 8x + 3 = 0$

Bruchgleichungen:

Multipliziere auf beiden Seiten mit dem **Hauptnenner**

26) Ermitteln Sie jeweils die Definitionsmenge der Bruchgleichung, und lösen Sie die Gleichung.

(a)* $\dfrac{2x - 1}{2x + 5} = \dfrac{1}{3}$ (b) $\dfrac{1}{x + 4} = \dfrac{3}{x - 3}$ (c)* $\dfrac{4x + 3}{x - 6} = \dfrac{4x - 5}{x + 2}$

Wurzelgleichungen:

Isoliere die (bzw. eine) Wurzel und quadriere. Wiederhole dies ggf.

Beachte: Eine Probe der Lösungen ist nötig.

27) Ermitteln Sie jeweils die Definitionsmenge der Wurzelgleichung, und lösen Sie die Gleichung.

(a)* $\sqrt{12x - 3} = 3$ (b)* $\sqrt{3x - 21} = x - 7$ (c) $\sqrt{9x - 5} = 4 - \sqrt{3 + x}$

28) Ermitteln Sie jeweils die Definitionsmenge der logarithmischen Gleichung, und lösen Sie die Gleichung.

(a) $4 + 3\lg(2x) = 10$ (b)* $\lg(11x + 5) - \lg(x + 1) = 1$

(c) $\ln(x^2 - 8) = 0$ (d)* $\ln(x - 1) + \ln(3) = \ln(x^2 - 1)$

29) Lösen Sie die Exponentialgleichungen

(a) $10^{5x} = 3^{10}$ (b)* $(7^{x-2})^{x+2} = (7^{x+3})^{x-4}$ (c)* $\left(\frac{3}{2}\right)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-17}$

Substitution:

(1) Substitution $u = f(x)$, so dass die Gleichung für u von bekanntem Typ ist

(2) Löse die Gleichung für u

(3) Finde zu allen Lösungen u die zugehörigen x

30) Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a)* $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$ (b)* $e^x + 2e^{-x} = 3$ (c) $\lg(x)^2 - 3\lg(x) + 2 = 0$

Gleichungssysteme:

Einsetzverfahren:

(1) Löse eine Gleichung nach einer Unbekannten auf

(2) Setze dies in die andere Gleichung ein

(3) Löse diese dann nach der verbleibenden Unbekannten auf

(Bei nichtlinearen Gleichungssystemen treffe man die Auswahl in (1) so, dass das Auflösen möglichst einfach ist.)

Additionsverfahren:

Multipliziere die Gleichungen mit geeigneten Faktoren so, dass bei Bildung der Summe (Differenz) eine Unbekannte entfällt.

31) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a) I. $3x - 4y = 12$
II. $2x + 2y = 22$

(b)* I. $2x + 3y = 8$
II. $3x - 6y = -30$

32) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

(a) I. $10x + y = 10$
II. $5x(15x + y) = 0$

(b)* I. $x^2 + xy - y^2 = 1$
II. $2x - y = 2$

Kapitel 4: Funktionen

Zeichnen einer Geraden

(1) Schnittpunkt mit der x- Achse: Setze $y = 0$ und löse nach x auf.
(2) Schnittpunkt mit der y- Achse: Setze $x = 0$ und löse nach y auf.
(3) Zeichne die Gerade durch die beiden Achsenschnittpunkte.

Beachte: Gibt es in (1) bzw. (2) keine Lösung, so ist die Gerade waagrecht bzw. senkrecht.

33) Gegeben sind folgende Geradengleichungen:

(a) $y = 8 - 2x$ (b) $2x + 3y - 6 = 0$ (c)* $3x + 9 = 0$ (d)* $2y - 10 = 0$

Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und stellen Sie die Geraden in einem Koordinatensystem grafisch dar.

34) Skizzieren Sie den Bereich, der durch folgende Bedingungen beschrieben ist:

$y \leq 8 - 2x,\ 2x + 3y - 6 \geq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S,$$

(x_s, y_S) sind die Koordinaten des Scheitelpunktes

$a > 0$: Parabel nach oben geöffnet

$a < 0$: Parabel nach unten geöffnet

Der Betrag von a bestimmt, ob die Parabel gestaucht ($|a| > 1$) oder gestreckt ($|a| < 1$) ist.

35) Gegeben sind folgende quadratische Funktionen:

(a)* $y = 2x^2 - 1$ (b)* $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$ (c) $y = -2x^2 + 4x + 6$

Wo befinden sich die Scheitelpunkte und Nullstellen der zugehörigen Graphen? Skizzieren Sie die Graphen mit Hilfe des Scheitelpunktes und der Nullstellen.

36) Schreiben Sie die folgenden Funktionen als Verkettung zweier Funktionen $u(x)$ und $v(u)$, so dass $f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$ und bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche

(a)* $y = (2x + 1)^3$ (b)* $y = \ln(4 - x^2)$ (c) $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x - 2}}$

37) Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

(a) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 1}$ (b) $y = \ln(10 - x^2)$ (c)* $y = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$ (d)* $y = x^4 - 17x^2 + 16$

Bestimmung der Umkehrfunktion

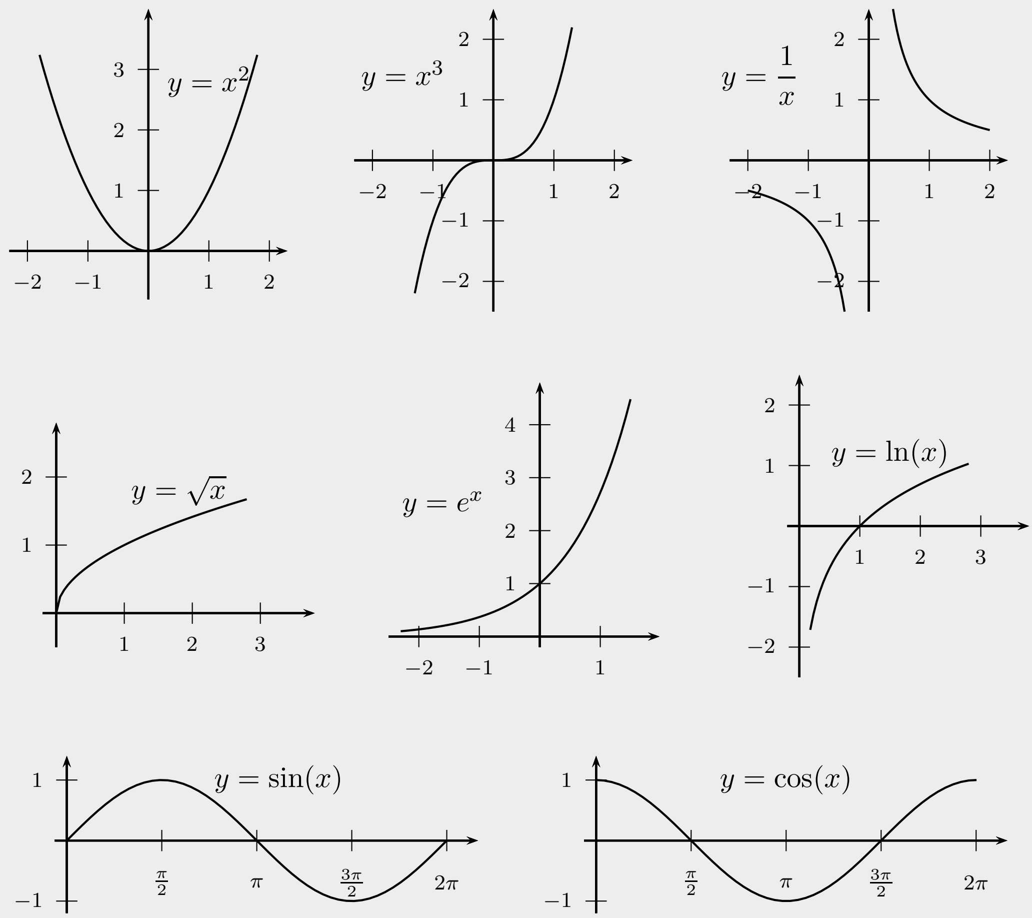
(1) Löse $y = f(x)$ nach x auf

(2) Vertausche x und y

38) Bilden Sie zu den folgenden Funktionen $y = f(x)$ die Umkehrfunktion f^{-1}.
Geben Sie jeweils den Definitionsbereich und den Wertebereich an.

(a)* $y = 5x + 3$ (b) $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

Graphen wichtiger Funktionen



39) Entwickeln Sie die Bilder folgender Funktionen aus dem Bild der Grundfunktion. Geben Sie den Definitions– und Wertebereich an und berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionen mit den Koordinatenachsen.

(a)* $y = \sqrt{x+3} + 1$ (Grundfunktion $y = \sqrt{x}$)

(b)* $y = -2\ln(x+1) + 1$ (Grundfunktion $y = \ln x$)

(c) $y = \dfrac{2}{x-1} + 1$ (Grundfunktion $y = 1/x$)

(d)* $y = e^{-2x} - 3$ (Grundfunktion $y = e^x$)

(e) $y = 2\sin(2x + \pi/2) + 1$ (Grundfunktion $y = \sin(x)$)

40)* Eine Autovermietung bietet zwei Tarife A und B mit folgenden Kosten (in Euro) für ein Wochenende an:

	Grundmiete	Inklusive km	Kosten pro zusätzlichem km
Tarif A	200	200	0.25
Tarif B	300	500	0.20

(a) Stellen Sie die Kostenfunktionen in Abhängigkeit von gefahrenen km auf und zeichnen Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem.

(b) Bei welcher Fahrleistung ist welcher Tarif günstiger?

41) Ein Monopolist produziert ein gewisses Gut X. Die Kosten für die Herstellung von x Einheiten betragen $K(x) = 0.2x^2 + 500000$. Bietet er auf dem Markt x Einheiten an, so ergibt sich ein Verkaufspreis von $p = p(x) = 1200 - 0.2x$.

(a) Stellen Sie die Absatz-Preis Funktion $x(p)$ auf.

(b) Stellen Sie den Erlös als Funktion $E(x)$ der Menge x dar.

(c) Stellen Sie den Erlös als Funktion $E(p)$ des Preises p dar.

(d) Stellen Sie den Gewinn als Funktion $G(x)$ der Menge x dar.

(e) Für welche Mengen x macht er einen Gewinn $G(x) \geq 0$?

Kapitel 5: Ableitungen

Die Ableitung $f'(a)$ der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = a$ ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(sofern der Grenzwert existiert).}$$

Dies entspricht der **Steigung** der (Tangente der) Funktion an dieser Stelle.

Wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
$x^r,\ r \neq 0$	$r \cdot x^{r-1}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$

Ableitungsregeln

$$\begin{aligned}
(u \pm v)' &= u' \pm v' \\
(c \cdot u)' &= c \cdot u' \\
(u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\
(u/v)' &= (u' \cdot v - u \cdot v')/v^2 \\
(v \circ u)'(x) &= u'(x) \cdot v'(u(x))
\end{aligned}$$

42) Bestimmen Sie die Ableitung von

(a) $f(x) = x^6 + 2x^5 - 4x^3 + x - 3$ (b) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ (c) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ (e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

43) Gegeben sei die Funktion

(a) $f(x) = \sin(3x+5)$ (b) $f(x) = (x^2 + x + 1)^9$

Stellen Sie die Funktion jeweils als Verkettung zweier Funktionen $u(x)$ und $v(u)$ dar, so dass $f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$. Bilden Sie $u'(x), v'(u)$ und leiten Sie $f(x)$ nach der Kettenregel ab.

Gleichung der Tangente (von $f(x)$ an der Stelle $x = a$)

$$t_a(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

44) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Gleichung der Tangente jeweils an der Stelle $x_0 = 1$ und zeichnen Sie die Kurve zusammen mit der Tangente.

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ (b)* $f(x) = e^x$ (c)* $f(x) = \ln(x)$

Bedingung für Extremwerte:

Hat $f(x)$ an der Stelle a ein lokales Maximum (Minimum), so gilt

$$f'(a) = 0 \qquad \text{(also waagrechte Tangente in } a\text{)}$$

45) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle Stellen mit einer waagrechten Tangente

(a)* $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (b)* $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$ (c) $f(x) = x \cdot e^{-x^2/8}$

46) Der Treibstoffverbrauch y (in Liter pro 100 km) in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit x (in km/h) sei für ein gewisses Pkw-Modell gegeben durch $y = f(x) = \dfrac{x}{9} - 3 + \dfrac{400}{x}$.

(a) Für welche konstante Geschwindigkeit x wird der Verbrauch minimal ?

(b) Der Mietpreis für den Pkw betrage 18 € pro Stunde sowie zusätzlich 50 € Grundgebühr. Der Treibstoff kostet 1,50 € pro Liter. Stellen Sie die Kostenfunktion $K(x)$ für die Gesamtkosten einer Fahrt von 700 km auf.

(c) Welche Geschwindigkeit sollte gefahren werden, um diese Kosten zu minimieren ?

47)* Ein Gemüsehändler kauft beim Erzeuger Spargel zu 3 € pro Kilogramm ein. Seinen Verkaufspreis kann er zwischen 5 € und 10 € variieren. Er weiß aus Erfahrung, dass er bei einem Preis von x Euro pro Kilogramm Spargel eine Menge von $y = f(x) = 120 - 10x$ (in Kilogramm) pro Tag absetzen kann.

(a) Stellen Sie eine Formel für den Gewinn $G(x)$ in Abhängigkeit vom gewählten Verkaufspreis x auf.

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Gewinnfunktion.

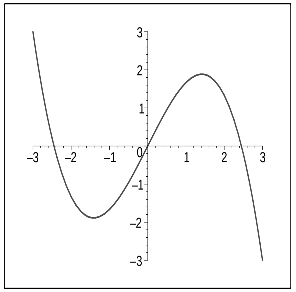
(c) Für welchen Verkaufspreis wird der Gewinn maximal ?

48) Auf den folgenden Seiten finden Sie jeweils die Graphen von 9 Funktionen. Ordnen Sie die sechs Graphen rechts so den leeren Feldern zu, dass Sie in jeder Spalte von oben nach unten Funktionen f, f', f'' erhalten. Führen Sie dazu keine Rechnungen aus, sondern entscheiden Sie auf Grund der erkennbaren Eigenschaften.

(siehe auch http://www.mathe-online.at/tests/diff1/ablerkennen.html)

Ableitungs–Puzzle 1

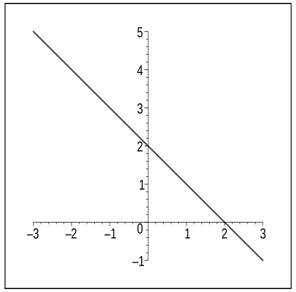
Ordnen Sie die Funktionsgraphen so zu, dass unter jeder Funktion ihre Ableitung steht.



①

②

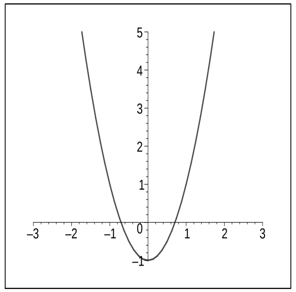
③

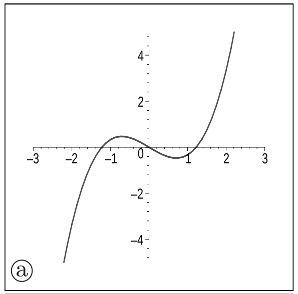


④

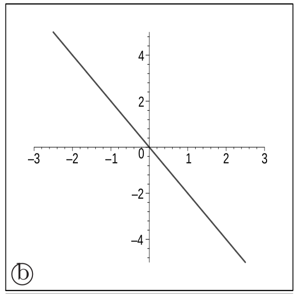
⑤

⑥

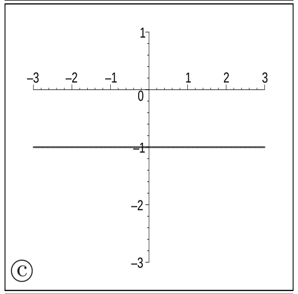




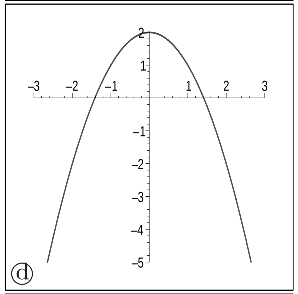
ⓐ



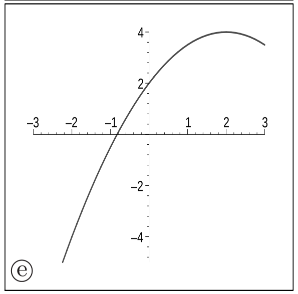
ⓑ



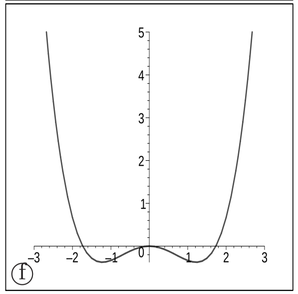
ⓒ



ⓓ



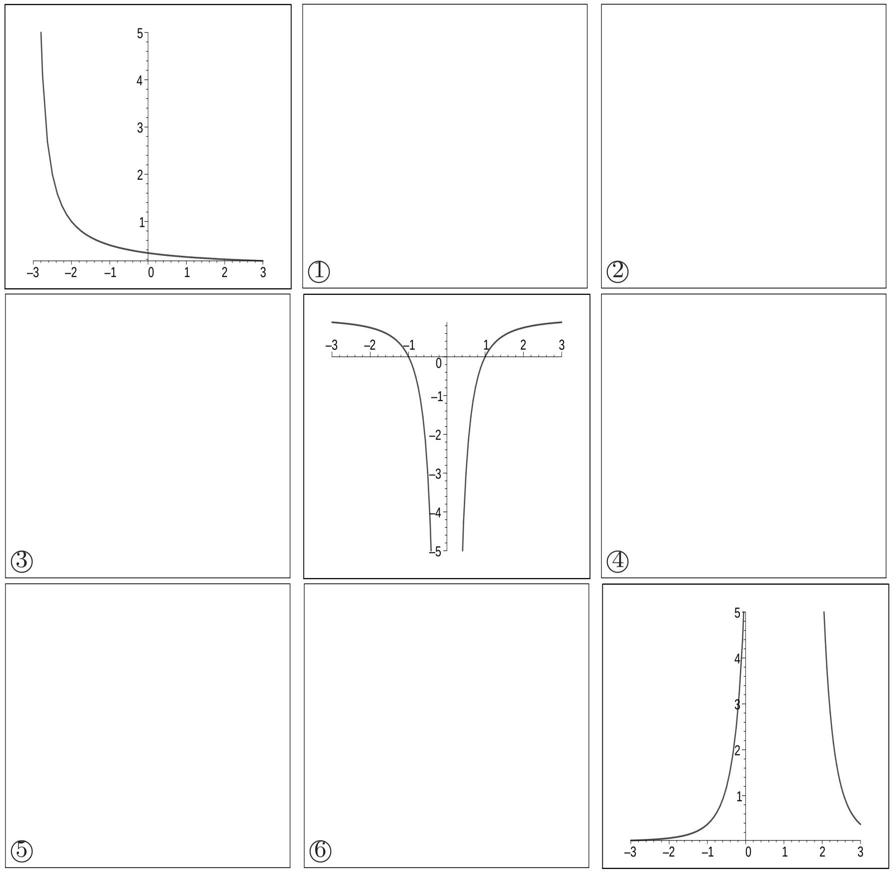
ⓔ

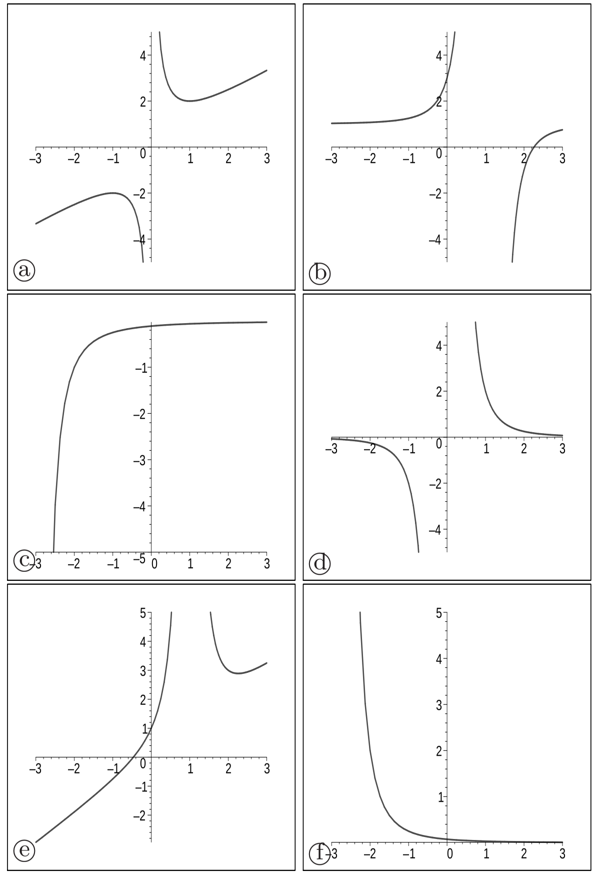


ⓕ

Ableitungs–Puzzle 2

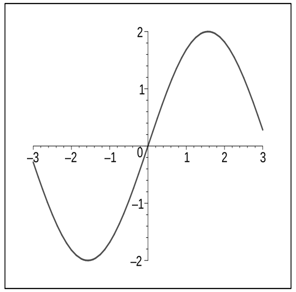
Ordnen Sie die Funktionsgraphen so zu, dass unter jeder Funktion ihre Ableitung steht.





Ableitungs–Puzzle 3

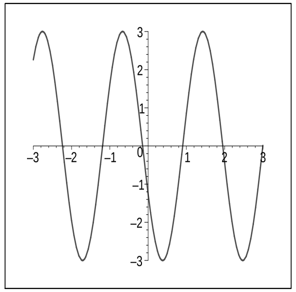
Ordnen Sie die Funktionsgraphen so zu, dass unter jeder Funktion ihre Ableitung steht.



①

②

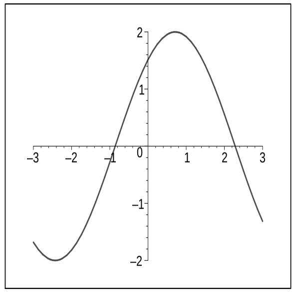
③

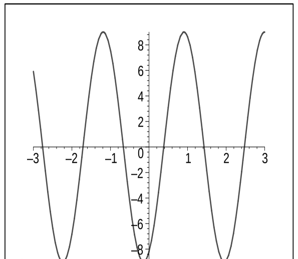


④

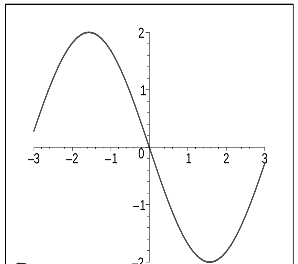
⑤

⑥

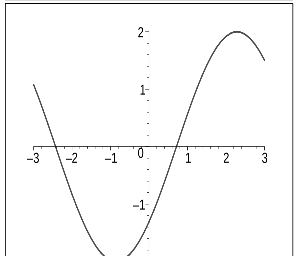




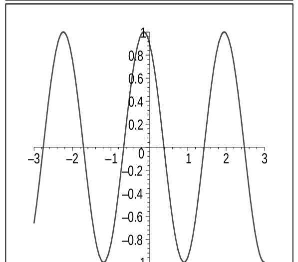
ⓐ



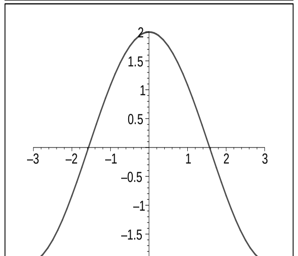
ⓑ



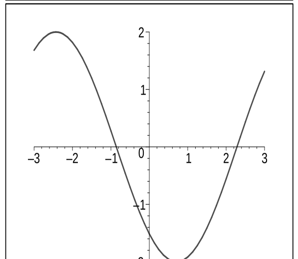
ⓒ



ⓓ



ⓔ



ⓕ

Hochschule Zittau/Görlitz
Grundlagenkurs Mathematik
Prof. Dr. U. Schnell

Lösungen

Kapitel 1: Grundrechenarten

1) (a) $a(a+1)$ (b) $ab(a+b)$ (c) $a(b+c-d)$

(d) Zunächst aus den beiden ersten Summanden a ausklammern

$\to \ a(b-c)-b+c = a(b-c)-1(b-c) = (a-1)(b-c)$

(e) $4b(2a+5b)$ (f) $(a+4)(2b+3)$ (g) $(2+3b)(a+1)$

2) (a) $3b+2c$ (b) $4a+2b+3c$

3) (a) $18a^2-ab-4b^2$ (b) $2(bc-ad)$

(c) Zuerst erste bzw. zweite binomische Formel anwenden, dann zusammenfassen

$\to \ 4a^2b^2$

alternativ: 3. bin. Formel $\to \ (a^2+b^2+(a^2-b^2))\cdot(a^2+b^2-(a^2-b^2)) = 2a^2\cdot 2b^2$

4) (a) $(x+y)^2$ (b) $(7x+y)^2$ (c) $(4x-2y)^2$ (d) $(2u+3v)(2u-3v)$

(e) Zuerst die ersten drei Summanden mit der ersten binomischen Formel umschreiben, dann auf das Ergebnis die dritte anwenden

$\to \ (2u+5v)^2-u^2 = (2u+5v+u)(2u+5v-u) = (3u+5v)(u+5v)$

5) (a) $\square = 5$ (b) $\square = 2uv,\ \bigcirc = 9w^2$ (c) $\square = y,\ \bigcirc = 0.25x^2,\ \triangledown = y^2$

(d) $\square = 7vw^2,\ \bigcirc = 25u^4$

6) (a) $b=a^2$ und $a<1 \ \to \ b<a$ (b) Kürzen mit 11 $\to \ a=b$

(c) $b = -\dfrac{11}{10} \ \to \ |a|<|b| \ \to \ b<a$

7) (a) $\dfrac{8}{3}$ (b) $\dfrac{1}{3}$ (c) $\dfrac{9a}{2b}$ $(a,b\neq 0)$

(d) $\dfrac{4y\,(3x-z)}{4x\,(4z+2y)} = \dfrac{y\,(3x-z)}{x\,(4z+2y)}$ $(x\neq 0,\ y\neq -2z)$

(e) $\dfrac{9ab(7ab-1)}{9ab(2+3ab)} = \dfrac{7ab-1}{2+3ab}$ $(a,b\neq 0,\ a\cdot b\neq -2/3)$

8) (a) 2 (b) Hauptnenner 14 $\rightarrow$ $\dfrac{9}{14}$ (c) Hauptnenner 24 $\rightarrow$ $\dfrac{25}{24}$

(d) Hauptnenner ist $3(a+1)$ $\rightarrow$ $\dfrac{-5}{3(a+1)}$ $(a \neq -1)$

(e) Hauptnenner ist $12ab$ $\rightarrow$ $\dfrac{3a - 14b^2 + 3a^2b^2}{6ab}$ $(a, b \neq 0)$

(f) Hauptnenner ist $3x(z+2)$ $\rightarrow$ $\dfrac{y}{z+2}$ $(x \neq 0, z \neq -2)$

9) (a) $\dfrac{1}{8}$ (b) $\dfrac{100}{63}$ (c) 2

(d) $\dfrac{35xy^2 \cdot 2 \cdot (2x-y)}{4 \cdot (2x-y) \cdot 70xy^2} = \dfrac{1}{4}$

(e) $\dfrac{3y^2 \cdot (12x+4)}{(3x+1) \cdot 6y^2} = \dfrac{3y^2 \cdot 4 \cdot (3x+1)}{(3x+1) \cdot 6y^2} = 2$

10) Der Scheich hat nicht 100% seines tierischen Vermögens aufgeteilt, da $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18} < 1$. Es wurden also 17/18 von $n+1$ Kamelen aufgeteilt. Das restliche 1/18 ist das übrig bleibende Kamel. Also gilt $n + 1 = 18$ und die vererbte Anzahl der Kamele war 17.

Kapitel 2: Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

11) (a) a^{-4} (b) $-a^6$ (c) $(b-a)(b-a)(b-a) = (b-a)^3$ (oder $-(a-b)^3$) (d) $-b^4$

12) (a) -81 (b) -125 (c) $-\dfrac{1}{8}$ (d) $\dfrac{4}{9}$

13) (a) $a^{(n+1)+(n+1)+n-n-0-(n-1)} = a^{n+3}$

(b) $\dfrac{3 \cdot 6 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{(n+1)-1} \cdot b^{(m+1)-(m+1)} \cdot c^{(n+7)-n} = 9a^n c^7$

(c) $\dfrac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} \cdot \dfrac{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}$

$= a^{-2-(-3)} \cdot b^{-3-(-5)} \cdot c^{-5-(-4)} \cdot x^{-4-(-3)} \cdot y^{-6+6} \cdot z^{-7-(-5)} = ab^2c^{-1}x^{-1}z^{-2}$

14) (a) 1 (b) 1 (c) 8 (d) 4 (e) 2 (f) 5 (g) 7

15) (a) 3 (b) $(\sqrt{0.04})^5 = 0.2^5$ (c) $a^{(1+1/2)\cdot 1/3 \cdot 1/2} = a^{1/4} = \sqrt[4]{a}$

(d) $\sqrt[3]{\dfrac{a^6}{3} + \sqrt{\dfrac{4}{9}a^{12}}} = \sqrt[3]{\dfrac{a^6}{3} + \dfrac{2a^6}{3}} = \sqrt[3]{a^6} = a^{6 \cdot 1/3} = a^2$

16) (a) Teilweise Wurzel Ziehen:

$$6 \cdot \sqrt{9 \cdot 3} + 2 \cdot \sqrt{36 \cdot 3} - 7 \cdot \sqrt{25 \cdot 3} \;=\; 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} - 7 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \;=\; -5\sqrt{3}$$

(b) Teilweise Wurzel Ziehen:

$$\sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{36 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} \;=\; 5 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} \;=\; 4\sqrt{2}$$

(c) Alles unter eine Wurzel:

$$\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5} \;=\; \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7} \;=\; \sqrt{3 \cdot 3} \cdot \sqrt{5 \cdot 5} \cdot \sqrt{7 \cdot 7} \;=\; 3 \cdot 5 \cdot 7 \;=\; 105$$

17)

	Grundgleichung	Lösung
(a)	$4^x = 4$	$x = 1$
(b)	$2^x = 4$	$x = 2$
(c)	$3^x = 81$	$x = 4$
(d)	$5^x = 1/25 = 5^{-2}$	$x = -2$
(e)	$2^{-2} = x$	$x = 1/4$
(f)	$e^1 = x$	$x = e$
(g)	$10^3 = x$	$x = 1000$
(h)	$x^{-1} = 4$	$x = 1/4$
(i)	$x^3 = 64$	$x = 4$
(j)	$x^{-2} = 1/9$	$x = 3$

18) (a) $\lg(10^{-1/2}) \;=\; -1/2 \lg(10) \;=\; -1/2$ (b) $\ln(a^{5/7}) \;=\; 5/7 \cdot \ln a$

(c) $\lg\left(\dfrac{a^2 \cdot b^{1/2}}{a^{5/2} \cdot b^{3/2}}\right) \;=\; \lg\left(a^{-1/2} \cdot b^{-1}\right) \;=\; \lg(a^{-1/2}) + \lg(b^{-1}) \;=\; -1/2 \cdot \lg(a) - \lg(b)$

19) (a) $\ln\left(\dfrac{3 \cdot 4}{6}\right) \;=\; \ln(2)$

(b) $\lg(a^5) + \lg(a^2) - \lg(a^3) \;=\; \lg\left(\dfrac{a^5 \cdot a^2}{a^3}\right) \;=\; \lg(a^4) \;=\; 4\lg(a)$

alternativ: $5\lg(a) + 2\lg(a) - 3\lg(a) = 4\lg(a) = \lg(a^4)$

(c) $\ln\left(\dfrac{2x \cdot 4x}{8x}\right) \;=\; \ln(x)$

20) Bestand nach 10 Jahren $= 0.96^{10} = 0.6648 \;\approx\; 2/3$. Also: Ja.

21) Oberfläche $= 6a^2 = 96 \quad\rightarrow\quad a^2 = 16 \quad\rightarrow\quad a = 4$

22) $20000 \cdot 0.75^3 = 8437.50$

Kapitel 3: Gleichungen

23) (a) $x = 3$ (b) $x = -2$ (c) $x = 5$

24) (a) $x = 3$ oder $x = -3$ (b) $x = 2$ oder $x = -3$

(c) $x(x-5) = 0 \quad \to \quad x = 0$ oder $x = 5$

(d) $(x-1)^2 = 0 \quad \to \quad$ nur $x = 1$

25) (a) keine Lösung

(b) $x^2 - 8x - 48 = 0 \quad \to \quad x = 12$ oder $x = -4$

(c) $x^2 - 2x + 3/4 = 0 \quad \to \quad x = 1/2$ oder $x = 3/2$

26) (a) $x \neq -5/2$, Hauptnenner $3(2x+5)$, Lösung $x = 2$

(b) $x \neq -4,\ 3$, Hauptnenner $(x+4)(x-3)$, Lösung $x = -15/2 = -7.5$

(c) $x \neq 6$, -2, Hauptnenner $(x-6)(x+2)$, Lösung $x = 3/5 = 0.6$

27) (a) $x \geq 1/4$, Lösung $x = 1$ (b) $x \geq 7$, Lösungen $x = 7$ oder $x = 10$

(c) $x \geq 5/9$, Quadrieren und Wurzel isolieren $\to \sqrt{x+3} = 3 - x$

Noch mal Quadrieren $\to$ Lösung $x = 1$ und nicht $x = 6$ (Probe!)

28) (a) $x > 0$, $\lg(2x) = 2 \to 2x = 10^2 \to$ Lösung $x = 50$

(b) $x > -5/11$, $\quad \lg\left(\dfrac{11x+5}{x+1}\right) = 1 \to \dfrac{11x+5}{x+1} = 10 \to$ Lösung $x = 5$

(c) $|x| > \sqrt{8}$, $\quad x^2 - 8 = 1 \to$ Lösung $x = \pm 3$

(d) $x > 1$, $\quad \ln((x-1)\cdot 3) = \ln(x^2-1) \to (x-1)\cdot 3 = x^2 - 1 \to x^2 - 3x + 2 = 0$

$\to$ Lösung $x = 2$ (nicht $x = 1$)

29) (a) Auf beiden Seiten lg anwenden $\to 5x = 10\lg(3) \to x = 2\lg(3)$

(b) $7^{(x-2)(x+2)} = 7^{(x+3)(x-4)} \quad \to \quad (x-2)(x+2) = (x+3)(x-4) \quad \to \quad = -8$

(c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{5x-7} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{17-3x} \quad \to \quad 5x - 7 = 17 - 3x \quad \to \quad x = 3$

30) (a) $u = x^2 \;\rightarrow\; u^2 - 4u - 45 = 0 \;\rightarrow\; u = -5, 9 \;\rightarrow\; x = \pm 3 \;\; (x^2 = u = -5 \text{ geht nicht})$

(b) $u = e^x \;\rightarrow\; u + \frac{2}{u} = 3 \;\rightarrow\; u^2 - 3u + 2 = 0 \;\rightarrow\; u = 1, 2 \;\rightarrow\; x = 0, \ln(2)$

(c) $u = \lg(x) \;\rightarrow\; u^2 - 3u + 2 = 0 \;\rightarrow\; u = 1, 2 \;\rightarrow\; x = 10, 100$

31) (a) II $\rightarrow\; y = 11 - x,$ in I eingesetzt $\rightarrow\; x = 8$ und $y = 3$

(b) II $\rightarrow\; x = 2y - 10,$ in I eingesetzt $\rightarrow\; y = 4$ und $x = -2$

32) (a) I $\rightarrow\; y = 10 - 10x,$ in I eingesetzt $\rightarrow\; 5x(5x + 10) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ oder $x = -2$

$\rightarrow$ Zwei Lösungen $x = 0,\; y = 10$ oder $x = -2,\; y = 30$

(b) II $\rightarrow\; y = 2x - 2,$ in I eingesetzt $\rightarrow\; x^2 - 6x + 5 = 0 \;\rightarrow\; x = 1$ oder $x = 5$

$\rightarrow$ Zwei Lösungen $x = 1,\; y = 0$ oder $x = 5,\; y = 8$

Kapitel 4: Funktionen

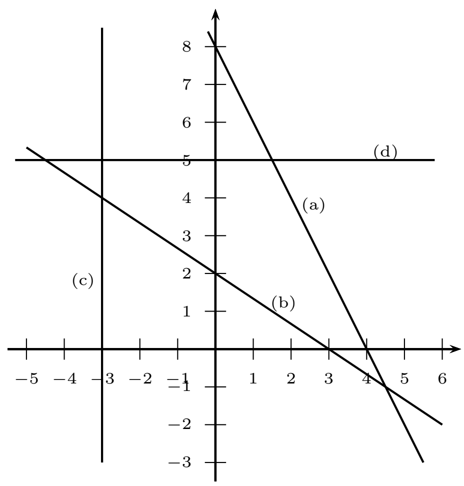
33)

(a) $x = 4$ und $y = 8$

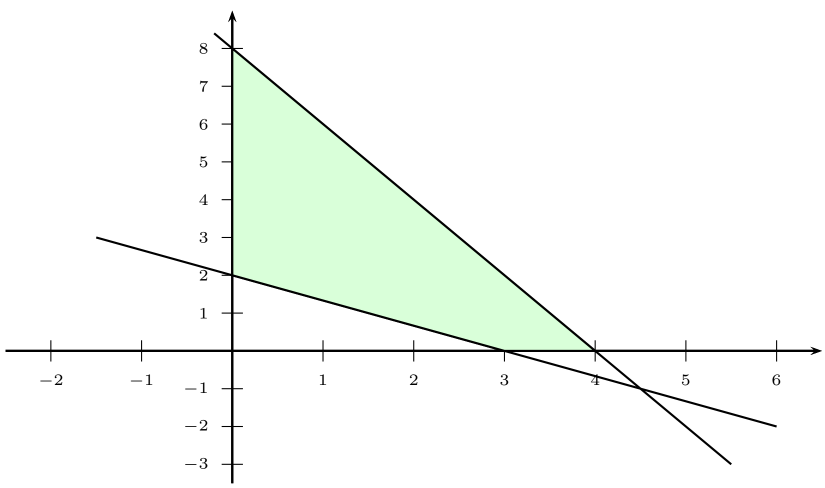
(b) $x = 3$ und $y = 2$

(c) $x = -3$ und y nicht

(d) x nicht und $y = 5$



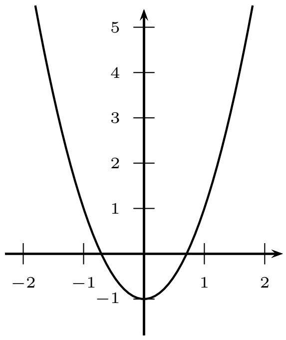
34)



35) (a) $y = 2(x-0)^2 - 1$

$S = (0, -1)$

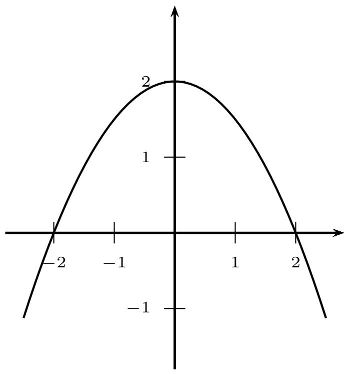
Nullstellen $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



(b) $y = -\dfrac{1}{2}(x-0)^2 + 2$

$S = (0, 2)$

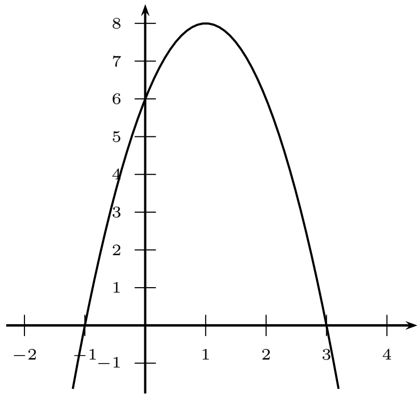
Nullstellen $x = \pm 2$



(c) $y = -2(x-1)^2 + 8$

$S = (1, 8)$

Nullstellen $x = -1,\ x = 3$



36) (a) $u(x) = 2x + 1, \quad v(u) = u^3, \quad D = \mathbb{R}$

(b) $u(x) = 4 - x^2, \quad v(u) = \ln(u), \quad D = (-2, 2)$

(c) $u(x) = \dfrac{x-1}{x-2}, \quad v(u) = \sqrt{u}, \quad D = (-\infty, 1] \cup (2, \infty)$

37) (a) $x^2 + x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} + 6} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{5}{2} \quad \rightarrow \quad N = \{2, -3\}$

(b) $\ln(10 - x^2) = 0 \quad \rightarrow \quad 10 - x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \rightarrow \quad N = \{-3, 3\}$

(c) $x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad N = \{-1, 1\}$

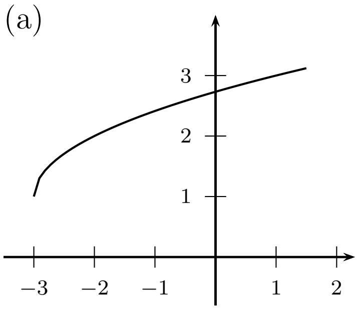
(d) $u := x^2 \ \rightarrow\ u^2 - 17u + 16 = 0 \ \rightarrow\ u \in \{1, 16\} \ \rightarrow\ N = \{-1, 1, -4, 4\}$

38) (a) $y = 5x + 3 \ \rightarrow\ 5x = y - 3 \ \rightarrow\ x = \dfrac{y-3}{5} \qquad f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{5}$

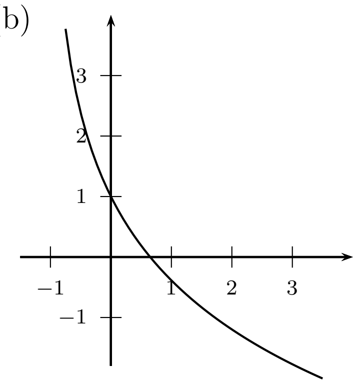
(b) $y = \dfrac{2x+1}{x-1} \ \rightarrow\ xy - y = 2x + 1 \ \rightarrow\ xy - 2x = y + 1 \ \rightarrow\ x(y-2) = y + 1 \ \rightarrow\ x = \dfrac{y+1}{y-2}$

$f^{-1} : \mathbb{R} \backslash \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \backslash \{1\}, \quad f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

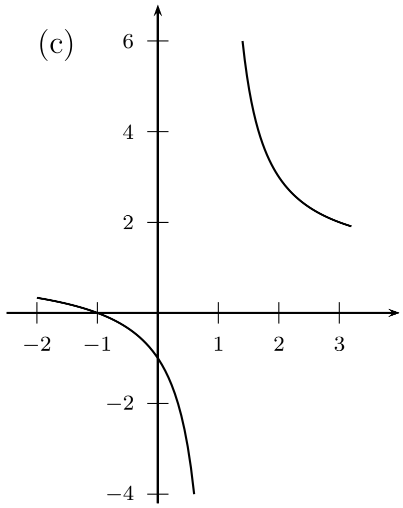
39) (a)



(b)



(c)

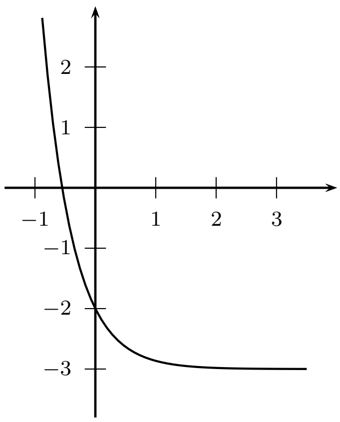


(a)
$D = \{x : x \geq -3\}$
$W = \{y : y \geq 1\}$
x–Achse: –
y–Achse: $y = \sqrt{3} + 1$

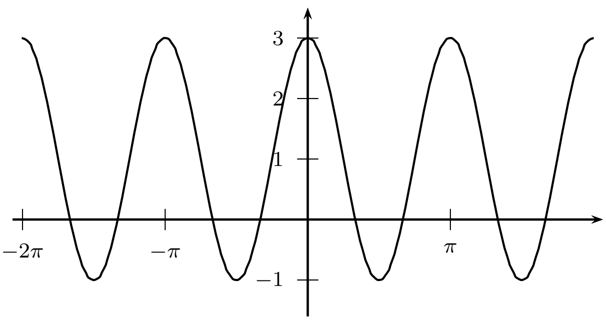
(b)
$D = \{x : x > -1\}$
$W = \mathbb{R}$
x–Achse: $x = \sqrt{e} - 1$
y–Achse: $y = 1$

(c)
$D = \{x : x \neq 1\}$
$W = \{y : y \neq 1\}$
x–Achse: $x = -1$
y–Achse: $y = -1$

(d)



(e)

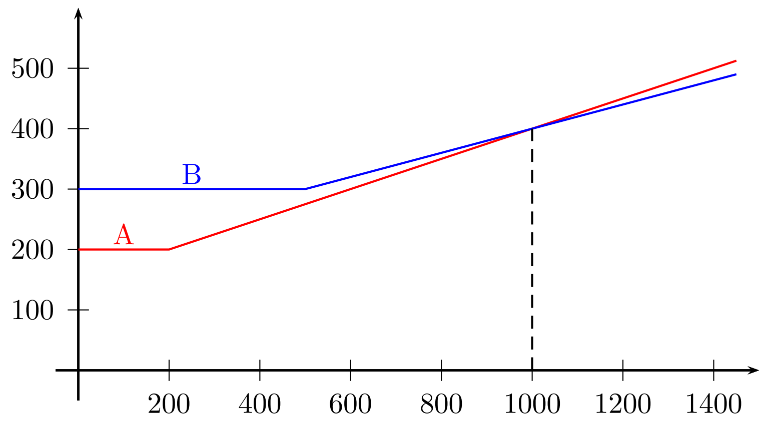


(d)
$D = \mathbb{R}$
$W = \{y : y > -3\}$
x–Achse: $x = -\ln(3)/2$
y–Achse: $y = -2$

(e)
$D = \mathbb{R}$
$W = [-1, 3]$
x–Achse: $x = \pm\pi/3 + k \cdot \pi$
y–Achse: $y = 3$

40) (a) $A(x) = \begin{cases} 200, & 0 \leq x \leq 200 \\ 200 + 0.25 \cdot (x - 200) = 0.25x + 150, & x > 200 \end{cases}$

$B(x) = \begin{cases} 300, & 0 \leq x \leq 500 \\ 300 + 0.2 \cdot (x - 500) = 0.2x + 200, & x > 500 \end{cases}$



(b) $0.25x + 150 = 0.2x + 200 \quad \rightarrow \quad 0.05x = 50 \quad \rightarrow \quad x = 1000$

Also: $x < 1000 \;\rightarrow\;$ Tarif A und $x > 1000 \;\rightarrow\;$ Tarif B

41) (a) $x = x(p) = 6000 - 5p$

(b) $E(x) = x \cdot p(x) = 1200x - 0.2x^2$

(c) $E(p) = x(p) \cdot p = 6000p - 5p^2$

(d) $G(x) = E(x) - K(x) = 1200x - 0.4x^2 - 500000$

(e) $500 \leq x \leq 2500$

Kapitel 5: Ableitungen

42) (a) $6x^5 + 10x^4 - 12x^2 + 1$ (b) $\ln(x) + 1$ (c) $\cos^2(x) - \sin^2(x)$

(d) $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$ (e) $\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

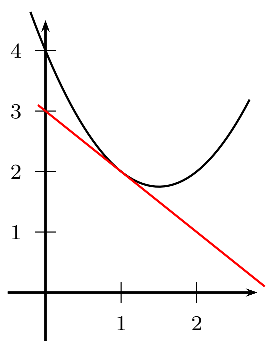
43) (a) $u(x) = 3x + 5, \quad v(u) = \sin(u), \quad f'(x) = 3\cos(3x + 5)$

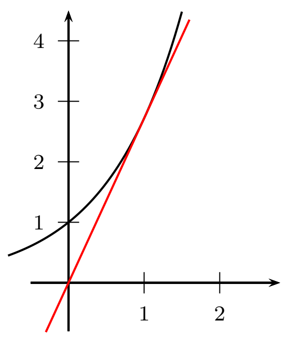
(b) $u(x) = x^2 + x + 1, \quad v(u) = u^9, \quad f'(x) = (2x + 1) \cdot 9 \cdot (x^2 + x + 1)^8$

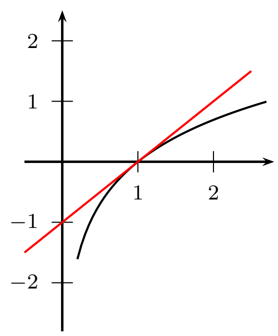
44) (a) $f'(x) = 2x - 3$
$f(1) = 2, f'(1) = -1$
$t(x) = 3 - x$

(b) $f'(x) = e^x$
$f(1) = e, f'(1) = e$
$t(x) = e \cdot x$

(c) $f'(x) = 1/x$
$f(1) = 0, f'(1) = 1$
$t(x) = x - 1$







45) (a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$

(b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \;\text{ und }\; x = 6$

(c) $f'(x) = (1 - x^2/4) \cdot e^{-x^2/8} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - x^2/4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$

46) (a) $f'(x) = \dfrac{1}{9} - \dfrac{400}{x^2} \quad = 0,\;$ für $x = \pm 60,\quad$ also 60 km/h

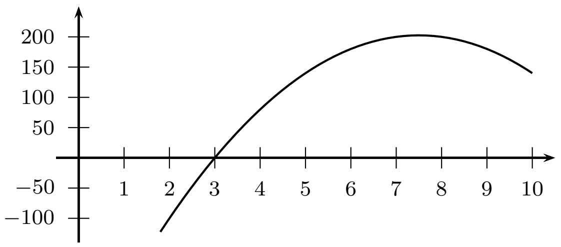
(b) Kosten = Grundgeb + Stdsatz · Zeit + Benzinpreis · Anzahl 100km · Verbrauch/100km

$$\rightarrow K(x) = 50 + 18 \cdot \frac{700}{x} + 1.5 \cdot 7 \cdot \left(\frac{x}{9} - 3 + \frac{400}{x}\right) = 18.5 + \frac{16800}{x} + \frac{7x}{6}$$

(c) $K'(x) = -\dfrac{16800}{x^2} + \dfrac{7}{6} \quad = 0,\;$ für $x = \pm 120,\quad$ also 120 km/h

47) (a) $G(x) =$ Erlös - Kosten = Menge · V-Preis - Kosten = Menge · (V-Preis - E-Preis)

$= (120 - 10x) \cdot (x - 3) = -10x^2 + 150x - 360 = -10(x - 7.5)^2 - 202.50$

(b) 

(c) $G'(x) = -20x + 150$

$= 0,\;$ für $x = 7.5$

Also: 7,50 €

48) (1) 1e, 2f, 3d, 4a, 5b, 6c (2) 1a, 2e, 3c, 4b, 5f, 6d (3) 1d, 2f, 3e, 4c, 5b, 6a

Beispiel für das Schließen „von oben nach unten“:

Im Ableitungspuzzle 1 muss im Feld ③ die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ darüber stehen. $f(x)$ hat als markante Punkte ein lokales Minimum in ca. $x = -1.5$ und ein lokales Maximum in ca. $x = 1.5$. Die gesuchte Funktion $f'(x)$ muss dort Nullstellen haben. Dies trifft nur auf (d) zu.

Beispiel für das Schließen „von unten nach oben“:

Im Ableitungspuzzle 1 muss im Feld ① eine Funktion $f(x)$ stehen, die als Ableitung die Funktion $f'(x)$ darunter hat. $f'(x)$ ist positiv für $x < 2$ und negativ für $x > 2$. D.h. die gesuchte Funktion $f(x)$ ist streng monoton wachsend für $x < 2$ und streng monoton fallend für $x > 2$. Darum muss sie in $x = 2$ ein lokales Maximum haben. Dies trifft nur auf (e) zu.