Hochschule Zittau/Görlitz
Grundlagenkurs Mathematik
Prof. Dr. U. Schnell

Aufgaben

Kapitel 1: Grundrechenarten

1) Erzeugen Sie Produkte, indem Sie gemeinsame Faktoren ausklammern:

(a) $a + a^2$ (b) $a^2b + ab^2$ (c) $ab + ac - ad$ (d)* $ab - ac - b + c$

(e)* $8ab + 20b^2$ (f)* $a(2b + 3) + 4(2b + 3)$ (g) $2a + 2 + 3b(a + 1)$

2) Lösen Sie die folgenden Klammern auf:

(a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$ (b)* $5a + (7c - (2a - 3b)) - (4c - a + b)$

3) Lösen Sie die folgenden Klammern auf:

(a)* $(2a - b)(9a + 4b)$ (b) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$ (c)* $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

4) Fassen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln zusammen:

(a) $x^2 + 2xy + y^2$ (b)* $49x^2 + 14xy + y^2$ (c) $16x^2 - 16xy + 4y^2$

(d)* $4u^2 - 9v^2$ (e) $4u^2 + 20uv + 25v^2 - u^2$

5) Ergänzen Sie gemäß der binomischen Formeln:

(a) $(3x + \square)^2 = 9x^2 + 30x + 25$ (b)* $(\square + 3w)^2 = 4u^2v^2 + 12uvw + \bigcirc$

(c)* $(0.5x + \square)^2 = \bigcirc + xy + \bigtriangledown$ (d) $(5u^2 + \square)(5u^2 - \square) = \bigcirc - 49v^2w^4$

6) Geben Sie (ohne Taschenrechner) an, welche der Zahlen a und b die größere ist:

(a) $a = \frac{13}{17},\ b = \frac{169}{289}$ (b) $a = \frac{11}{21},\ b = \frac{121}{231}$ (c) $a = -\frac{13}{12},\ b = -\frac{143}{130}$

7) Kürzen Sie folgende Brüche. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.

(a) $\frac{64}{24}$ (b)* $\frac{6732}{20196}$ (c) $\frac{63a^2b}{14ab^2}$ (d)* $\frac{12xy - 4yz}{16xz + 8xy}$ (e) $\frac{63a^2b^2 - 9ab}{18ab + 27a^2b^2}$

8) Addieren bzw. subtrahieren Sie folgende Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$ (b)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ (c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{3}{8}$ (d)* $\frac{2}{a+1}+\frac{1}{3a+3}-\frac{4}{a+1}$

(e) $\frac{3a}{6ab}-\frac{7b}{3a}+\frac{2ab}{4}$ (f)* $\frac{2y}{3z+6}-\frac{1-y}{z+2}+\frac{3x-2xy}{3xz+6x}$

9) Multiplizieren bzw. dividieren Sie folgende Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a)* $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$ (b) $\frac{10}{7}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}$ (c)* $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$ (d)* $\frac{35xy^2}{8x-4y}\cdot\frac{4x-2y}{70xy^2}$ (e) $\frac{3y^2}{3x+1}:\frac{6y^2}{12x+4}$

10) Ein Scheich bestimmt in seinem Testament die folgende Aufteilung seines Vermögens unter seinen drei Söhnen: der Älteste Sohn erhält die Hälfte, der mittlere ein Drittel und der jüngste ein Neuntel. Nach dem Ableben des Scheiches versuchen die Söhne, die n geerbten Kamele testamentsgemäß aufzuteilen. Dies gelingt jedoch nicht, ohne ein Kamel zu schlachten. In der Not erscheint ein Fremder und bietet den Söhnen sein Kamel an. Nun geht die Rechnung auf und es bleibt sogar ein Kamel übrig, das dem hilfsbereiten Fremden mit Dank zurück gegeben wird.

Wie viele Kamele hatte der Scheich?

Kapitel 2: Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

11) Schreiben Sie als eine Potenz:

(a) $(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})$ (b)* $-\left(\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\right)$

(c) $(b-a)(a-b)(a-b)$ (d)* $-(a^0b)\cdot(a^0b)\cdot(a^0b)\cdot(a^0b)$

12) Berechnen Sie: (a) -3^4 (b)* $(-5)^3$ (c) $(-2^{-1})^3$ (d)* $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

13) Vereinfachen Sie:

(a)* $\frac{a^{n+1}\cdot a^{n+1}\cdot a^n}{a^n\cdot a^0\cdot a^{n-1}}$ (b) $\frac{3\,a^{n+1}\cdot 6\,c^{n+7}\cdot 9\,b^{m+1}}{3\,c^n\cdot 2\,b^{m+1}\cdot 3\,a}$ (c)* $\frac{a^{-2}\cdot x^{-4}\cdot y^{-6}}{b^3\cdot c^{-4}\cdot z^{-5}}:\frac{a^{-3}\cdot b^{-5}\cdot x^{-3}}{c^{-5}\cdot y^6\cdot z^{-7}}$

14) Berechnen Sie folgende Wurzeln:

(a)* $\sqrt{1}$ (b) $\sqrt[4]{1}$ (c)* $\sqrt[3]{-1}$ (d)* $\sqrt{0}$ (e)* $\sqrt{(-2)^2}$ (f) $\sqrt{9+16}$ (g) $\sqrt{9}+\sqrt{16}$

15) Vereinfachen Sie :

(a)* $\sqrt{\sqrt{81}}$ (b) $\sqrt{0.04^5}$ (c)* $\sqrt{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$ (d) $\sqrt[3]{\frac{a^6}{3}+\sqrt{\left(\frac{a^6}{3}\right)^2+\frac{a^{12}}{3}}}$

16) Fassen Sie zusammen:

(a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$ (b)* $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$ (c)* $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{7\cdot 5}$

17) Wenden Sie die Definition des Logarithmus an, um x zu ermitteln!

(a) $x=\log_4(4)$ (b)* $x=\operatorname{ld}(4)$ (c) $x=\log_3(81)$ (d)* $x=\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$

(e) $\operatorname{ld}(x)=-2$ (f)* $\ln(x)=1$ (g)* $\lg(x)=3$

(h)* $\log_x(4)=-1$ (i) $\log_x(64)=3$ (j)* $\log_x\left(\frac{1}{9}\right)=-2$

18) Vereinfachen Sie

(a)* $\lg\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$ (b) $\ln(\sqrt[7]{a^5})$ (c)* $\lg\left(\frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5b^3}}\right)$

19) Fassen Sie folgende Ausdrücke zu einem Logarithmus zusammen:

(a)* $\ln(3)+\ln(4)-\ln(6)$ (b) $5\lg(a)+\lg(a^2)-\lg(a^3)$ (c)* $\ln(2x)+\ln(4x)-\ln(8x)$

20) Tierschützer befürchten, dass die Population einer seltenen Tierart in den nächsten 10 Jahren auf zwei Drittel ihres heutigen Bestandes zurück geht. Ein Forscher behauptet, dass diese Population jährlich um 4% abnimmt. Decken sich die beiden Aussagen?

21) Die Oberfläche eines Würfels beträgt 96cm^2. Wie lang sind seine Kanten?

22)* Ein Neuwagen verliert jährlich 25 Prozent seines Wertes. Wie viel ist das Auto, das neu 20.000 Euro kostet, nach 3 Jahren noch wert?

Kapitel 3: Gleichungen

23) Lösen Sie folgende lineare Gleichungen:

(a)* $3x-9=0$ (b) $5x+12=3x+8$ (c)* $2(4x-3)+5(3x+1)=6(2x+9)$

24) Geben Sie die Lösungen folgender quadratischer Gleichungen ggf. mit Hilfe der binomischen Formeln an:

(a)* $x^2 - 9 = 0$ (b) $(x-2)(x+3) = 0$ (c)* $x^2 - 5x = 0$ (d) $x^2 - 2x + 1 = 0$

25) Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen mit Hilfe der *pq*-Formel:

(a)* $x^2 + 10x + 50 = 0$ (b) $(x-3)^2 - x - 20 = x + 37$ (c)* $4x^2 - 8x + 3 = 0$

26) Ermitteln Sie jeweils die Definitionsmenge der Bruchgleichung, und lösen Sie die Gleichung.

(a)* $\dfrac{2x-1}{2x+5} = \dfrac{1}{3}$ (b) $\dfrac{1}{x+4} = \dfrac{3}{x-3}$ (c)* $\dfrac{4x+3}{x-6} = \dfrac{4x-5}{x+2}$

27) Ermitteln Sie jeweils die Definitionsmenge der Wurzelgleichung, und lösen Sie die Gleichung.

(a)* $\sqrt{12x-3} = 3$ (b)* $\sqrt{3x-21} = x - 7$ (c) $\sqrt{9x-5} = 4 - \sqrt{3+x}$

28) Ermitteln Sie jeweils die Definitionsmenge der logarithmischen Gleichung, und lösen Sie die Gleichung.

(a) $4 + 3\lg(2x) = 10$ (b)* $\lg(11x+5) - \lg(x+1) = 1$

(c) $\ln(x^2 - 8) = 0$ (d)* $\ln(x-1) + \ln(3) = \ln(x^2 - 1)$

29) Lösen Sie die Exponentialgleichungen

(a) $10^{5x} = 3^{10}$ (b)* $\left(7^{x-2}\right)^{x+2} = \left(7^{x+3}\right)^{x-4}$ (c)* $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{5x-7} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x-17}$

30) Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a)* $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$ (b)* $e^x + 2e^{-x} = 3$ (c) $\lg(x)^2 - 3\lg(x) + 2 = 0$

31) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a) $3x - 4y = 12$ und $2x + 2y = 22$ (b)* $2x + 3y = 8$ und $3x - 6y = -30$

32) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

(a) $10x + y = 10$ und $5x(15x + y) = 0$ (b)* $x^2 + xy - y^2 = 1$ und $2x - y = 2$

Kapitel 4: Funktionen

33) Gegeben sind folgende Geradengleichungen:

(a) $y = 8 - 2x$ (b) $2x + 3y - 6 = 0$ (c)* $3x + 9 = 0$ (d)* $2y - 10 = 0$

Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und stellen Sie die Geraden in einem Koordinatensystem grafisch dar.

34) Skizzieren Sie den Bereich, der durch folgende Bedingungen beschrieben ist:

$y \leq 8 - 2x,\ 2x + 3y - 6 \geq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

35) Gegeben sind folgende quadratische Funktionen:

(a)* $y = 2x^2 - 1$ (b)* $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ (c) $y = -2x^2 + 4x + 6$

Wo befinden sich die Scheitelpunkte und Nullstellen der zugehörigen Graphen? Skizzieren Sie die Graphen mit Hilfe des Scheitelpunktes und der Nullstellen.

36) Schreiben Sie die folgenden Funktionen als Verkettung zweier Funktionen $u(x)$ und $v(u)$ dar, so dass $f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$ und bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche

(a)* $y = (2x + 1)^3$ (b)* $y = \ln(4 - x^2)$ (c) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

37) Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

(a) $y = \frac{x^2 + x - 6}{x + 1}$ (b) $y = \ln(10 - x^2)$ (c)* $y = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$ (d)* $y = x^4 - 17x^2 + 16$

38) Bilden Sie zu den folgenden Funktionen $y = f(x)$ die Umkehrfunktion f^{-1}.

Geben Sie jeweils den Definitionsbereich und den Wertebereich an.

(a)* $y = 5x + 3$ (b) $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$

39) Entwickeln Sie die Bilder folgender Funktionen aus dem Bild der Grundfunktion. Geben Sie den Definitions– und Wertebereich an und berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionen mit den Koordinatenachsen.

(a)* $y = \sqrt{x + 3} + 1$ (b)* $y = -2\ln(x + 1) + 1$ (c) $y = \frac{2}{x - 1} + 1$

(d)* $y = e^{-2x} - 3$ (e) $y = 2\sin(2x + \pi/2) + 1$

40)* Eine Autovermietung bietet zwei Tarife A und B mit folgenden Kosten (in Euro) für ein Wochenende an:

	Grundmiete	Inklusive km	Kosten pro zusätzlichem km
Tarif A	200	200	0.25
Tarif B	300	500	0.20

(a) Stellen Sie die Kostenfunktionen in Abhängigkeit von gefahrenen km auf und zeichnen Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem.

(b) Bei welcher Fahrleistung ist welcher Tarif günstiger?

41) Ein Monopolist produziert ein gewisses Gut X. Die Kosten für die Herstellung von x Einheiten betragen $K(x) = 0.2x^2 + 500000$. Bietet er auf dem Markt x Einheiten an, so ergibt sich ein Verkaufspreis von $p = p(x) = 1200 - 0.2x$.

(a) Stellen Sie die Absatz-Preis Funktion $x(p)$ auf.

(b) Stellen Sie den Erlös als Funktion $E(x)$ der Menge x dar.

(c) Stellen Sie den Erlös als Funktion $E(p)$ des Preises p dar.

(d) Stellen Sie den Gewinn als Funktion $G(x)$ der Menge x dar.

(e) Für welche Mengen x macht er einen Gewinn $G(x) \geq 0$?

Kapitel 5: Ableitungen

42) Bestimmen Sie die Ableitung von

(a) $f(x) = x^6 + 2x^5 - 4x^3 + x - 3$ (b) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ (c) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ (e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

43) Gegeben sei die Funktion

(a) $f(x) = \sin(3x + 5)$ (b) $f(x) = (x^2 + x + 1)^9$

Stellen Sie die Funktion jeweils als Verkettung zweier Funktionen $u(x)$ und $v(u)$ dar, so dass $f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$. Bilden Sie $u'(x), v'(u)$ und leiten Sie $f(x)$ nach der Kettenregel ab.

44) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Gleichung der Tangente jeweils an der Stelle $x_0 = 1$ und zeichnen Sie die Kurve zusammen mit der Tangente.

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ (b)* $f(x) = e^x$ (c)* $f(x) = \ln(x)$

45) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle Stellen mit einer waagrechten Tangente

(a)* $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (b)* $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$ (c) $f(x) = x \cdot e^{-x^2/8}$

46) Der Treibstoffverbrauch y (in Liter pro 100 km) in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit x (in km/h) sei für ein gewisses Pkw-Modell gegeben durch $y = f(x) = \dfrac{x}{9} - 3 + \dfrac{400}{x}$.

(a) Für welche konstante Geschwindigkeit x wird der Verbrauch minimal ?

(b) Der Mietpreis für den Pkw betrage 18 € pro Stunde sowie zusätzlich 50 € Grundgebühr. Der Treibstoff kostet 1,50 € pro Liter. Stellen Sie die Kostenfunktion $K(x)$ für die Gesamtkosten einer Fahrt von 700 km auf.

(c) Welche Geschwindigkeit sollte gefahren werden, um diese Kosten zu minimieren ?

47)* Ein Gemüsehändler kauft beim Erzeuger Spargel zu 3 € pro Kilogramm ein. Seinen Verkaufspreis kann er zwischen 5 € und 10 € variieren. Er weiß aus Erfahrung, dass er bei einem Preis von x Euro pro Kilogramm Spargel eine Menge von $y = f(x) = 120 - 10x$ (in Kilogramm) pro Tag absetzen kann.

(a) Stellen Sie eine Formel für den Gewinn $G(x)$ in Abhängigkeit vom gewählten Verkaufspreis auf.

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Gewinnfunktion.

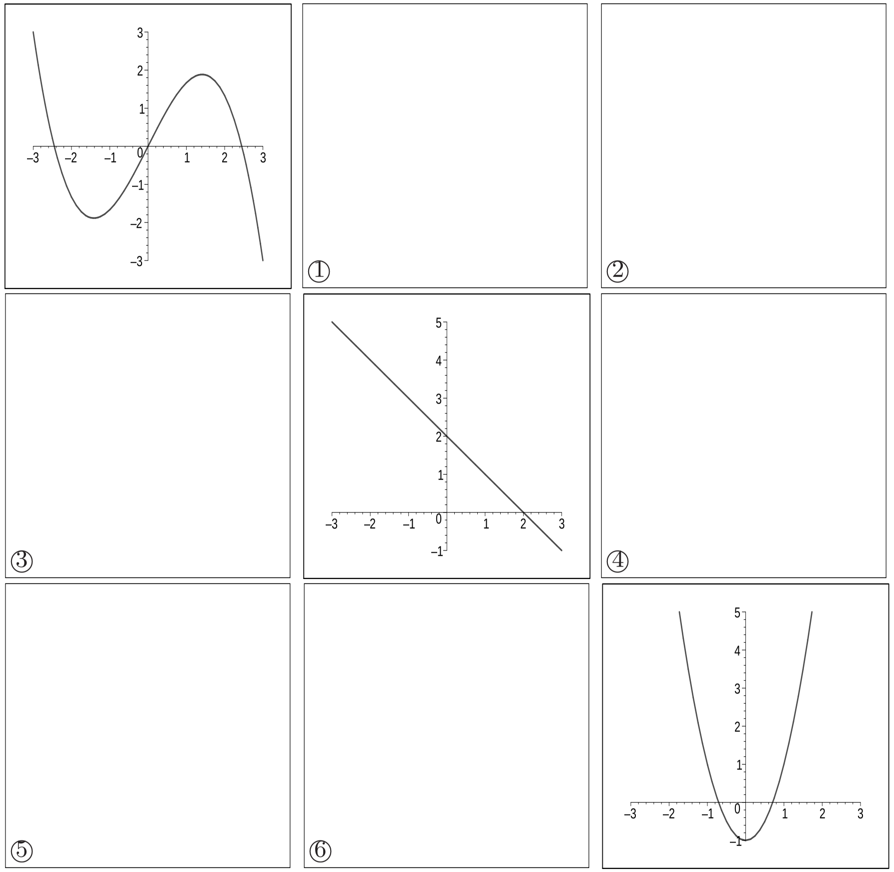
(c) Für welchen Verkaufspreis wird der Gewinn maximal ?

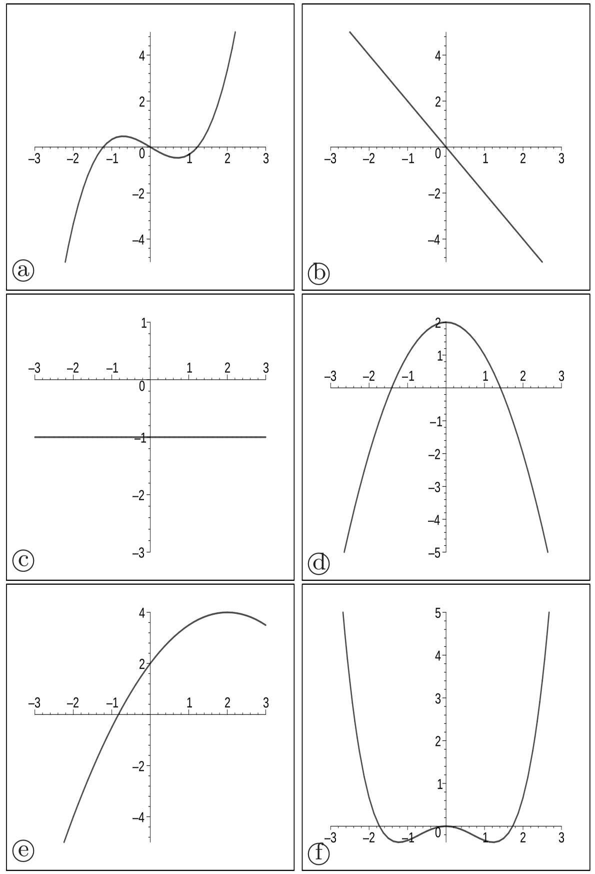
48) Auf den folgenden Seiten finden Sie jeweils die Graphen von 9 Funktionen. Ordnen Sie die sechs Graphen rechts so den leeren Feldern zu, dass Sie in jeder Spalte von oben nach unten Funktionen f, f', f'' erhalten. Führen Sie dazu keine Rechnungen aus, sondern entscheiden Sie auf Grund der erkennbaren Eigenschaften.

(siehe auch http://www.mathe-online.at/tests/diffl/ablerkennen.html)

Ableitungs–Puzzle 1

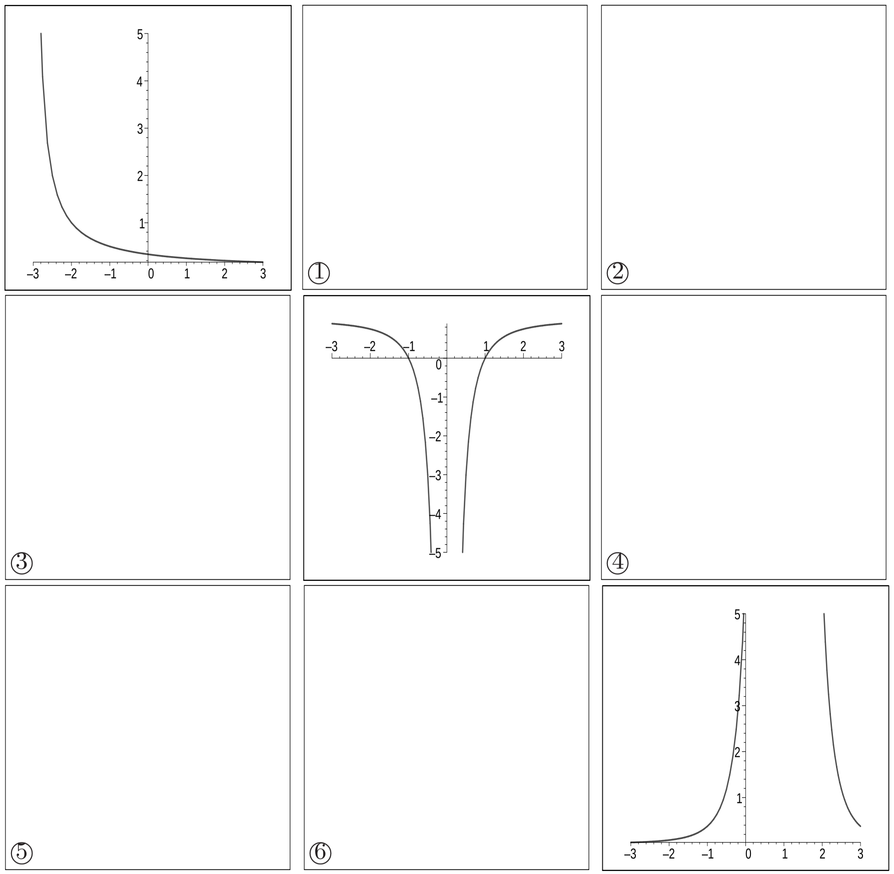
Ordnen Sie die Funktionsgraphen so zu, dass unter jeder Funktion ihre Ableitung steht.

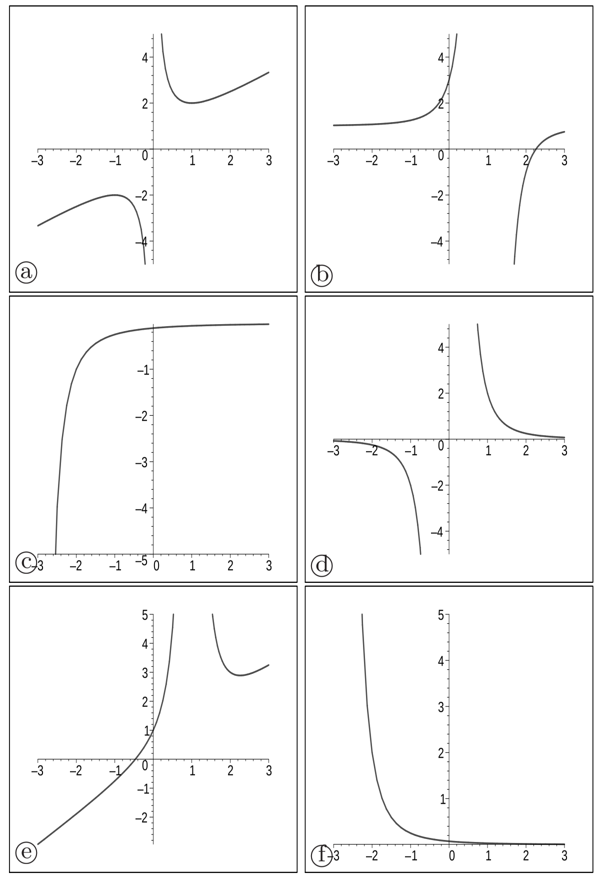




Ableitungs–Puzzle 2

Ordnen Sie die Funktionsgraphen so zu, dass unter jeder Funktion ihre Ableitung steht.





Ableitungs–Puzzle 3

Ordnen Sie die Funktionsgraphen so zu, dass unter jeder Funktion ihre Ableitung steht.