Vorkurs Mathematik

## 1. Grundlagen

Alle Aufgaben ohne TR lösen!

1) Schreiben Sie ohne Betragsstrich: a) $|-9|$  b) $|\cos\pi|$  c) $|\sqrt{2}-2|$  d) $\sqrt{2}-|-2|$

2) Erzeugen Sie Produkte, indem Sie gemeinsame Faktoren ausklammern:
a) $a+a^2$  b) $a^2b+ab^2$  c) $ab+ac-ad$  d) $ab-ac-b+c$
e) $8ab+20b^2$  f) $a(2b+3)+4(2b+3)$  g) $2a+2+3b(a+1)$

3) Vereinfachen Sie:
a) $7a-3b+(-a+2c)-(3c-6b)-(6a-3c)$  b) $5a+(7c-(2a-3b))-(4c-a+b)$

4) Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie:
a) $(2a-b)(9a+b)$  b) $(a+b)(c-d)-(a-b)(c+d)$  c) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

5) Fassen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln zusammen:
a) $x^2+2xy+y^2$  b) $49x^2+14xy+y^2$  c) $16x^2-16xy+4y^2$
d) $4a^2-9b^2$  e) $4a^2+20ab+25b^2-a^2$

6) Ergänzen Sie gemäß der binomischen Formeln:
a) $(3x+\bigcirc)^2=9x^2+30x+25$  b) $(\nabla+3c)^2=4a^2b^2+12abc+\bigcirc$
c) $(0.5a+\bigcirc)^2=\nabla+ab+\triangle$  d) $(5a^2+\bigcirc)(5a^2-\bigcirc)=\nabla-49b^2c^4$
e) $(x+\bigcirc)^2+\nabla=x^2+4x-1$  f) $(x+\bigcirc)^2+\nabla=x^2-4x-1$

7) Geben Sie ( ohne Taschenrechner ) an, welche der Zahlen $a$ und $b$ die größere ist:
a) $a=\frac{13}{17};b=\left(\frac{13}{17}\right)^2$  b) $a=\frac{11}{7};b=\frac{5}{3}$  c)* $a=\frac{c}{c+1};b=\frac{c+1}{c+2};c\neq-1,-2$

8) Kürzen Sie die folgenden Brüche. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.
a) $\frac{64}{24}$  b) $\frac{63a^2b}{14ab^2}$  c) $\frac{12xy-4yz}{16xz+8xy}$  d) $\frac{63a^2b^2-9ab}{18ab+27a^2b^2}$  e) $\frac{(a-b)^2}{b-a}$
f) $\frac{\frac{x}{x^2-4}}{\frac{1}{x+2}}$  g) $\frac{(x+3)}{\frac{x-3}{x^2-9}}$  h) $\frac{ac+ad+bc+bd}{(a^2-b^2)(c^2+2cd+d^2)}$

9) Addieren bzw. subtrahieren Sie die Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.
a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$  b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$  c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{3}{8}$  d) $\frac{2}{a+1}+\frac{1}{3a+3}-\frac{4}{a+1}$
e) $\frac{3a}{6ab}-\frac{7b}{3a}+\frac{2ab}{4}$  f) $\frac{2y}{3z+6}-\frac{1-y}{z+2}+\frac{3x-2xy}{3xz+6x}$
g) $\frac{5x-10}{4-x^2}+\frac{5x-1}{x^2+2x}-\frac{2-x}{x^3-2x^2}$

10) Ergänzen Sie:
a) $n^2 + n + 1 = n^2 \cdot (\bigcirc)$  b) $(1 - 2n)^3 = n^3 \cdot (\bigcirc)^3$

11) Multiplizieren bzw. dividieren Sie folgende Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.
a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$  b) $\frac{10}{7} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}$  c) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$  d) $\frac{35xy^2}{8x - 4y} \cdot \frac{4x - 2y}{70xy^2}$
e) $\frac{3y^2}{3x + 1} : \frac{6y^2}{12x + 4}$

12) Bilden Sie die Kehrwerte!
a) $\frac{a}{b}$  b) $\frac{a + 1}{b}$  c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  d) $\frac{1}{a + b}$  e) $7\frac{1}{3}$

13) Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:
a) $(x^5 + 2x^4 - x^2 + 5x - 3) : (x + 1) = ?$  b) $(3x^4 - x^3 - 9x^2 + 4x - 12) : (x^2 - 4) = ?$
c) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 4x - 12$

14) Ein Scheich bestimmt im Testament folgende Aufteilung seiner $n$ Kamele. Sein ältester Sohn erhält die Hälfte, der mittlere ein Drittel und der jüngste ein Neuntel. Nach dem Ableben des Scheichs teilen die Söhne die geerbten Kamele auf. Dabei bleibt ein Kamel übrig. Wie viele Kamele hatte der Scheich?

Lösungen
1) a) $9$  b) $1$  c) $2 - \sqrt{2}$  d) $\sqrt{2} - 2$
2) a) $a(a + 1)$  b) $ab(a + b)$  c) $a(b + c - d)$  d) $(a - 1)(b - c)$
e) $4b(2a + 5b)$  f) $(a + 4)(2b + 3)$  g) $(2 + 3b)(a + 1)$
3) a) $3b + 2c$  b) $4a + 2b + 3c$
4) a) $18a^2 - 7ab - b^2$  b) $2bc - 2ad$  c) $4a^2b^2$
5) a) $(x + y)^2$  b) $(7x + y)^2$  c) $(4x - 2y)^2$  d) $(2a + 3b)(2a - 3b)$
e) $(2a + 5b)^2 - a^2 = (3a + 5b)(a + 5b)$
6) a) $\bigcirc = 5$  b) $\nabla = 2ab; \bigcirc = 9c^2$  c) $\bigcirc = b; \nabla = 0.25a^2; \triangle = b^2$
d) $\bigcirc = 7bc^2; \nabla = 25a^4$  e) $\bigcirc = 2; \nabla = -5$  f) $\bigcirc = -2; \nabla = -5$
7) a) $b < a$  b) $a < b$  c) $b - a = \frac{1}{(c + 1)(c + 2)}$
$\rightarrow$  $b > a$ sofern $c > -1$ oder $c < -2$ und $a > b$ sofern $-2 < c < -1$
8) a) $\frac{8}{3}$  b) $\frac{9a}{2b}; a, b \neq 0$  c) $\frac{3xy - yz}{4xz + 2xy}; x \neq 0, y \neq -2z$
d) $\frac{7ab - 1}{2 + 3ab}; a, b \neq 0, a \cdot b \neq -\frac{2}{3}$  e) $b - a; a \neq b$
f) $\frac{x}{x - 2}; x \neq 2, -2$  g) $(x + 3)^2; x \neq 3, -3$  h) $\frac{1}{(a - b)(c + d)}; a \neq b, -b; c \neq -d$
9) a) $2$  b) $\frac{9}{14}$  c) $\frac{25}{24}$  d) $\frac{-5}{3(a + 1)}; a \neq -1$
e) $\frac{3a - 14b^2 + 3a^2b^2}{6ab}; a, b \neq 0$  f) $\frac{y}{z + 2}; x \neq 0, z \neq -2$
g) $\frac{2}{x^2(x + 2)}; x \neq 0, 2, -2$
10) a) $\bigcirc = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$  b) $\bigcirc = \frac{1}{n} - 2$

11) a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{100}{63}$ c) $2$ d) $\frac{1}{4}; x \neq 0, y \neq 0; y \neq 2x$ e) $2; x \neq -\frac{1}{3}; y \neq 0$

12) a) $\frac{b}{a}$ b) $\frac{b}{a+1}$ c) $\frac{ab}{a+b}$ d) $a+b$ e) $\frac{3}{22}$

13 a) $x^4 + x^3 - x^2 + 5 - \frac{8}{x+1}$ b) $3x^2 - x + 3$ c) $+2; -2$

14) Die Gleichung: $\frac{1}{2}n + \frac{1}{3}n + \frac{1}{9}n + 1 = n$ führt auf $\frac{17}{18}n + 1 = n$ und damit $n = 18$

## 2. Potenzen

TR nur für Aufgaben 9), 10) und 12)

1) Schreiben Sie als eine Potenz:

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{a^{-2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $(b-a)(a-b)(a-b)$ d) $-(a^0 b)(a^0 b)(a^0 b)(a^0 b)$

2) Berechnen Sie: a) $-3^4$ b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2^2}{3}$

f) $-2^4 + (-2)^4$ g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\left(-\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{3}{2}\right)^2$

3) Vereinfachen Sie:

a) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^n \cdot a^0 \cdot a^{n-1}}$ b) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6c^{n+7} \cdot 9b^{m+1}}{3a \cdot 2b^{m+1} \cdot 3c^n}$ c) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{z^{-5} \cdot b^3 \cdot c^{-4}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{z^{-7} \cdot y^6 \cdot c^{-5}}$

4) Berechnen Sie folgende Wurzeln

a) $\sqrt{1}$ b) $\sqrt[4]{1}$ c) $\sqrt[3]{-1}$ d) $\sqrt{0}$ e) $\sqrt{(-2)^2}$ f) $\sqrt{9+16}$ g) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$

h) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{4}$ i) $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{7}\,\sqrt[4]{5}}\sqrt[4]{70}$ j) $\frac{\sqrt{2x^2-2}}{\sqrt{x+1}\,\sqrt{x-1}}$

5) Vereinfachen Sie

a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ b) $\sqrt{0.04^3}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}a^2 + \sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2 + \frac{a^4}{8}}}$

e) $\sqrt[7]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$ f) $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}$ g) $\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}{\sqrt[6]{a}}$

6) Fassen Sie zusammen:

a) $6\sqrt{27} + 2\sqrt{108} - 7\sqrt{75}$ b) $\sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{72} + \sqrt{18}$ c) $\sqrt{3 \cdot 7}\,\sqrt{3 \cdot 5}\,\sqrt{7 \cdot 5}$

7) Für welche reelle Zahlen sind die folgenden Wurzeln erklärt?

a) $\sqrt{-a}$ b) $\sqrt{|-a|}$ c) $\sqrt{a^2}$ d) $\sqrt{-a^2}$

8) Eine rechteckige Tischplatte ist doppelt so lang wie breit und hat eine Fläche von $0.72m^2$. Wie breit ist die Platte?

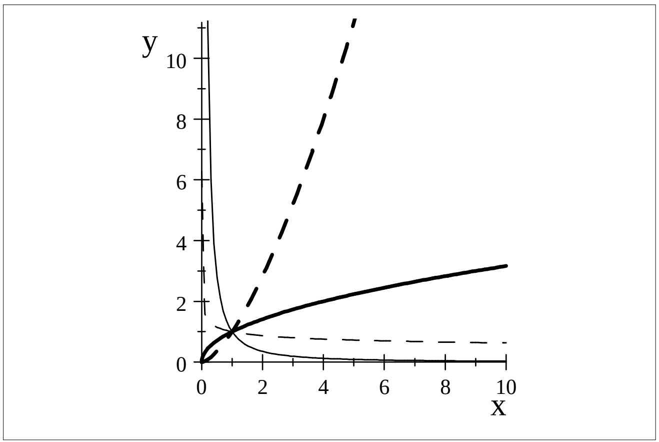
9) Tierschützer befürchten, dass die Population einer seltenen Tierart in den nächsten 10 Jahren auf zwei Drittel ihres heutigen Bestandes zurück geht. Ein Forscher behauptet, dass diese Population jährlich um 4% abnimmt. Decken sich die beiden Aussagen?

10) Ein Neuwagen verliert jährlich 25% seines Wertes. Wie viel ist das Auto, das neu 20.000 € kostet, nach 3 Jahren noch wert?

11) Die Oberfläche eines Würfels beträgt $96cm^2$. Welches Volumen hat er?

12) a) Ein Student legt 900 € bei einem jährlichen Zinssatz von 2% p.a. an. Welches Kapital hat er nach 5 Jahren zur Verfügung?
b) Welches Kapital müsste er anlegen, damit er nach 5 Jahren 1000 € zur Verfügung hat. (Zinssatz 2% p.a.)
c) Bei welchem Jahreszinssatz wächst sein Kapital innerhalb von 5 Jahren von 950 € auf 1000 €?
(Nehmen Sie an, dass der Zinssatz über die 5 Jahre jeweils unverändert bleibt.)

13) In der folgenden Skizze sind die Graphen der Funktionen $\sqrt{x}, x^{-0.2}, x^{-1.5}$ und $x^{1.5}$ eingetragen. Welche Linie gehört zu welchem Graphen?




<u>Lösungen</u>

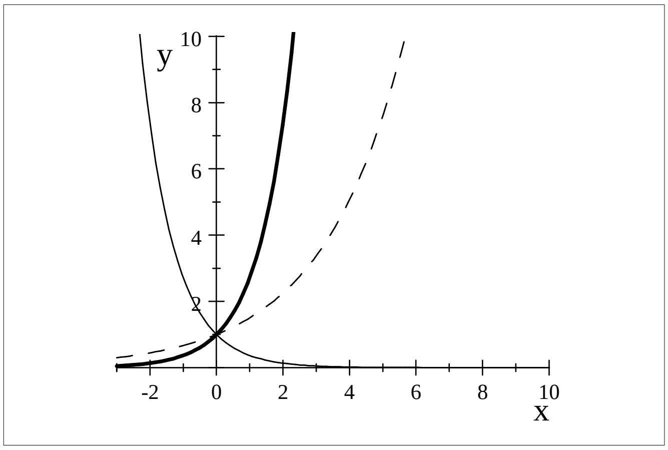
1) a) $a^{-4}$ b) $-a^6$ c) $(b-a)^3 = -(a-b)^3$ d) $-b^4$
2) a) $-81$ b) $-125$ c) $-\frac{1}{8}$ d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{16}{9}$ f) $0$ g) $-\frac{27}{8}$ h) $-6$
3) a) $a^{n+3}$ b) $9a^nc^7$ c) $ab^2c^{-1}x^{-1}z^{-2}$
4) a) $1$ b) $1$ c) $-1$ d) $0$ e) $2$ f) $5$ g) $7$
h) $2$ i) $2$ j) $\sqrt{2}$
5) a) $3$ b) $0.2^3 = 0.008$ c) $\sqrt[4]{a}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4a^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2}$
e) $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ f) $x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$ g) $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$
6) a) $-5\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{2}$ c) $105$
7) a) $a \leq 0$ b)c) für jede reelle Zahl $a$ d) $a = 0$
8) Bezeichnet $x$ die Breite, so gilt: $x \cdot 2x = 0.72m^2 \to x^2 = 0.36m^2 \to x = 0.6m$ ($x = -0.6$ entfällt)

9) Bestand nach 10 Jahren: $A \cdot 0.96^{10} = A \cdot 0.6648 \approx A \cdot 2/3$ ($A$=Anfangsbestand)
10) $20000 \cdot 0.75^3$ €$= 8437.50$ €
11) $6a^2 = 96 \to a^2 = 16 \to a = 4 \to V = a^3 = 64cm^3$
12) a) $900 \cdot 1.02^5$ €$= 993.67$ € b) $K \cdot 1.02^5$ €$= 1000$ € $\to K = 905.73$ €
c) Gesucht ist der Zinssatz $i$. Mit $q = 1 + i$ gilt:
$950q^5 = 1000 \to q^5 = \frac{1000}{950} \to q = \sqrt[5]{\frac{1000}{950}} = 1.0103$ →Zinssatz: $i = 1.03\%$ p.a.
13) $\sqrt{x}$ (dick, durchgezogen), $x^{-0.2}$(dünn, gestrichelt), $x^{-1.5}$ (dünn, durchgezogen) und $x^{1.5}$ (dick, gestrichelt)

## 3. Logarithmen

TR nur für Aufgabe 8) und 9)

1) In der folgenden Skizze sind die Graphen der Funktionen $e^x, 1.5^x, e^{-x}$ eingetragen. Welche Linie gehört zu welchem Graphen?




2) Wenden Sie die Definition des Logarithmus an, um $x$ (ohne TR) zu ermitteln.
a) $x = \log_4(4)$ b) $x = \log_2(4)$ c) $x = \log_3(81)$ d) $x = \log_5\left(\frac{1}{25}\right)$
e) $\log_2(x) = -2$ f) $\ln(x) = 1$ g) $\lg(x) = 3$ h) $x = \log_3(1)$
i) $x = \ln(1)$ j) $x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$ k) $x = \ln\sqrt{e}$ l) $x = \lg\sqrt[3]{100}$
m) $\log_x(4) = -1$ n) $\log_x\left(\frac{1}{9}\right) = -2$ o) $\log_x(0.001) = -3$ p) $\ln(x) = -2$

3) Vereinfachen Sie
a) $\lg\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$ b) $\ln\left(\sqrt[7]{a^5}\right)$ c) $\ln\left(\frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5b^3}}\right)$ d) $e^{-\ln x}$ e) $e^{3\ln x}$
f) $e^{-2\ln x}$ g) $e^{0.5\ln(x-1)}$

4) Fassen Sie folgende Ausdrücke zu einem Logarithmus zusammen:
a) $\ln(3) + \ln(4) - \ln(6)$ b) $5\lg(a) + \lg(a^2) - \lg(a^3)$ c) $\ln(2x) + \ln(4x) - \ln(8x)$

5) Stellen Sie nach $y$ um und vereinfachen Sie soweit wie möglich:
a) $3e^{1-y} = e \cdot s$ b) $2\ln(y) + 1 = t - 2$ c) $\ln(3 - y) = -2\ln(x+1) + \ln c$

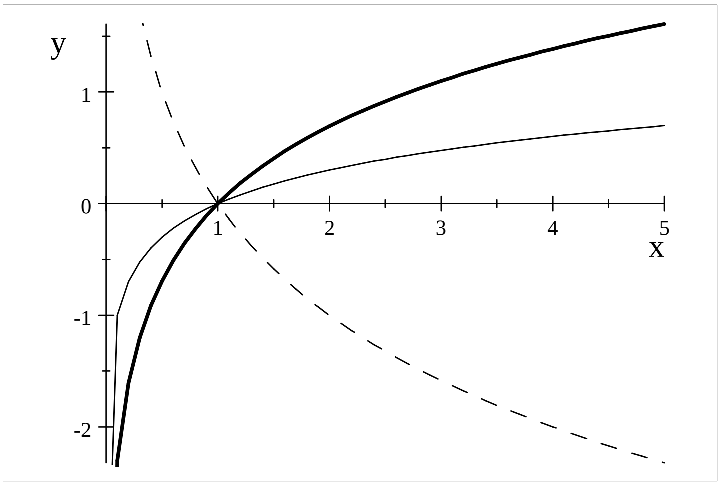
d) $e^{(3-y)^2} = \sqrt{e^t}$ e) $\left(e^{(3-y)}\right)^2 = \sqrt{e^t}$ f) $\frac{1}{2}\ln(y-1) = x^2 + \ln c$

g) $e^y = 2$ h) $2^{y+1} = 3^{y-2}$

6) Stellen Sie die folgenden Logarithmen mit Hilfe des natürlichen Logarithmus dar und vereinfachen Sie soweit möglich:

a) $\log_4(7)$ b) $\log_3(e^2)$ c) $\lg\left(\frac{1}{e}\right)$ d) $\lg x$ e) $\log_3(x)$

7) In der nachfolgenden Skizze sind die Logarithmusfunktionen $\lg x, \ln x$ und $\log_{0.5} x$ eingetragen. Welche Linie gehört zu welchem Graphen?




8)a) In wieviel Jahren wächst ein Kapital von $1000$ € bei einem Jahreszinsatz von $i = 1\%$ p.a. auf $1308.21$ € an?

b) In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei einem Jahreszinsatz von $i = 1\%$ p.a.?

9) Radioaktive Substanzen zerfallen nach dem Zerfallsgesetz $n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$, wobei $n(t)$ für die Anzahl der zum Zeitpunkt $t$ noch nicht zerfallenen Atome steht. Für das in der Medizin eingesetzte Isotop $^{60}Co$ lautet die Zerfallskonstante $\lambda = 0.132\frac{1}{a}$

($a$ bezeichnet hier die Zeiteinheit "Jahr").

a) Berechnen Sie die Halbwertszeit $\tau$ von $^{60}Co$ aus der Gleichung $n_0 e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2}n_0$.

b) Wieviel Prozent der Ausgangsmenge von $^{60}Co$ sind nach zwei Jahren zerfallen?

<u>Lösungen</u>

1a) $e^x$(dick durchgezogen), $1.5^x$ (dünn gestrichelt)

2a) $1$ b) $2$ c) $4$ d) $-2$ e) $\frac{1}{4}$ f) $e$ g) $10^3$ h) $0$

i) $0$ j) $-1$ k) $\frac{1}{2}$ l) $\frac{2}{3}$ m) $\frac{1}{4}$ n) 3 o) $10$ p) $e^{-2}$

3a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{7}\ln(a)$ c) $-0.5\ln(a) - \ln(b)$

d) $\frac{1}{x}$ e) $x^3$ f) $\frac{1}{x^2}$ g) $\sqrt{x-1}$

4a) $\ln(2)$ b) $\lg(a^4) = 4\lg(a)$ c) $\ln(x)$

5a) $\ln\left(\frac{3}{s}\right)$ b) $e^{\frac{t-3}{2}}$ c) $3 - \frac{c}{(x+1)^2}$ d) $3 \pm \sqrt{\frac{t}{2}}$ (Lösungen ex. nur, falls $t \geq 0$)

e) $3 - \frac{t}{4}$ f) $1 + c^2 e^{2x^2}$ g) $\ln 2$ h) $\frac{2\ln 3 + \ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$

6a) $\frac{\ln(7)}{\ln(4)}$ b) $\frac{2}{\ln(3)}$ c) $\frac{-1}{\ln(10)}$ d) $\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ e) $\frac{\ln(x)}{\ln(3)}$

7) $\ln x$ (dick durchgezogen), $\log_{0.5} x$ (gestrichelt), $\lg x$ (dünn durchgezogen)

8)a) $1000 \cdot 1.01^n = 1308.21 \quad \to \quad 1.01^n = 1.30821 \quad \to \quad n = \frac{\ln(1.30821)}{\ln(1.01)} = 27[a]$

b) $K \cdot 1.01^n = 2K \quad \to \quad n = \frac{\ln(2)}{\ln(1.01)} \approx 69.66[a]$

9a) $5,25a$ b) $23,2\%$

## 4. Gleichungen

1) Lösen Sie die folgenden Gleichungen

a) $3x - 9 = 0$ b) $5x + 12 = 3x + 8$ c) $2(4x - 3) + 5(3x + 1) = 6(2x + 9)$

2) Geben Sie die Lösungen folgender quadratischer Gleichungen ggf. mit Hilfe der binomischen Formeln an:

a) $x^2 - 9 = 0$ b) $(x - 2)(x + 3) = 0$ c) $x^2 - 5x = 0$ d) $x^2 - 2x + 1 = 0$

3) Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen mit Hilfe der pq-Formel:

a) $x^2 + 10x + 50 = 0$ b) $(x - 3)^2 - x - 20 = x + 37$ c) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

4) Ermitteln Sie jeweils die Definitionsmenge der Bruchgleichung, und lösen Sie die Gleichung.

a) $\frac{2x - 1}{2x + 5} = \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{x + 4} = \frac{3}{x - 3}$ c) $\frac{4x + 3}{x - 6} = \frac{4x - 5}{x + 2}$

d) $\frac{6 - x}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{x}$

5) Ermitteln Sie jeweils die Definitionsmenge der Wurzelgleichung, und lösen Sie die Gleichung.

a) $\sqrt{12x - 3} = 3$ b) $\sqrt{3x - 21} = x - 7$ c) $\sqrt{9x - 5} = 4 - \sqrt{3 + x}$

d) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$ e) $\sqrt{2 - x} - \sqrt{x + 2} = -2$

6) Ermitteln Sie jeweils die Definitionsmenge der logarithmischen Gleichung, und lösen Sie die Gleichung.

a) $4 + 3\lg(2x) = 10$ b) $\lg(11x + 5) - \lg(x + 1) = 1$

c) $\ln(x^2 - 8) = 0$ d) $\ln(x - 1) + \ln(3) = \ln(x^2 - 1)$

e) $\ln(x + 1) + \ln(x + 3) = \frac{1}{3}\ln 27 + \ln(1 - x)$

7) Lösen Sie die Exponentialgleichungen

a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $(2^{x-2})^{x+2} = (2^{x+3})^{x-4}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-17}$

d) $2^{3x} \cdot 4^{2-x} = 2^x\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}$

8) Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$ b) $(\lg(x))^2 - 3\lg(x) + 2 = 0$ c)* $e^x + 2e^{-x} = 3$

9) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $\begin{array}{llll} I. & 3x & -4y & = 12 \\ II. & 2x & +2y & = 22 \end{array}$ b) $\begin{array}{llll} I. & 2x & +3y & = 8 \\ II. & 3x & -6y & = -30 \end{array}$

10) Bauer Paul hat auf dem Markt Ziegen zu je 200 € und Enten zu je 30 € gekauft. Insgesamt hat er 950 € ausgegeben. Auf dem Nachhauseweg zählt er bei seinen Tieren insgesamt 26 Beine. Wieviele Ziegen und Enten hat er gekauft?

11) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

a) $\begin{array}{lll} I. & 10x + y & = 10 \\ II. & 5x(15x + y) & = 0 \end{array}$ b) $\begin{array}{lll} I. & x^2 + xy - y^2 & = 1 \\ II. & 2x - y & = 2 \end{array}$

12) Die (in unbegrenzten Mengen zur Verfügung stehenden) Metall-Legierungen $M_1$ und $M_2$ bestehen aus Silber und Gold. Die Zusammensetzung kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

| | Silber | Gold |
|---|---|---|
| $M_1$ | 20% | 80% |
| $M_2$ | 60% | 40% |

Kann man diese Legierungen so mischen, dass man 10kg eine Legierung erhält, die zu 44% aus Silber und zu 56% aus Gold besteht?

Lösungen (ohne TR!):

1a) $x = 3$ b) $x = -2$ c) $x = 5$
2a) $x = 3$ oder $x = -3$ b) $x = 2$ oder $x = -3$ c) $x = 0$ oder $x = 5$ d) $x = 1$
3a) keine Lösung b) $x = 12$ oder $x = -4$ c) $x = 0.5$ oder $x = 1.5$
4a) $x \neq -2.5$, Lösung $x = 2$ b) $x \neq -4, 3$, Lösung $x = -7.5$
c) $x \neq 6, -2$, Lösung $x = 0.6$ d) $x \neq 0, 2, -2$, keine Lösung
5a) $x \geq \frac{1}{4}$, Lösung $x = 1$ b) $x \geq 7$, Lösungen $x = 7$ oder $x = 10$
c) $x \geq \frac{5}{9}$, Lösung $x = 1$ aber nicht $x = 6$ (Probe!) d) $x \geq 0$, Lösung $x = 25$
e) $-2 \leq x \leq 2$, Lösung $x = 2$ aber nicht $x = -2$ (Probe!)
6a) $x > 0$, Lösung $x = 50$ b) $x > -\frac{5}{11}$, Lösung $x = 5$
c) $|x| > \sqrt{8}$, Lösung $x = \pm 3$ d) $x > 1$, Lösung $x = 2$
e) $-1 < x < 1$, Lösung $x = 0$ aber nicht $x = -7$
7a) $x = 2\lg(3)$ b) $x = -8$ c) $x = 3$ d) $x = 2$
8a) $u = x^2 \rightarrow u^2 - 4u - 45 = 0 \rightarrow u = -5, 9 \rightarrow x = \pm 3$ ($x^2 = u = -5$ geht nicht)
b) $u = \lg(x) \rightarrow u = 1, 2 \rightarrow x = 10, 100$
c) $u = e^x \rightarrow u + 2\frac{1}{u} = 3 \rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0 \rightarrow u = 1, 2 \rightarrow x = 0, \ln(2)$
9a) $x = 8, y = 3$ b) $x = -2, y = 4$
10) Die Fragestellung führt auf das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llll} I. & 200x & +30y & = 950 \\ II. & 4x & +2y & = 26 \end{array}$$

dabei bezeichnen $x$ (bzw. $y$) die gesuchte Anzahl von Ziegen (bzw.Enten)

Als Lösung erhält man: $x = 4$ Ziegen und $y = 5$ Enten.
11a) $x = 0, y = 10$ oder $x = -2, y = 30$ b) $x = 1, y = 0$ oder $x = 5, y = 8$
12) Die Fragestellung führt auf das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rlll} I. & 0.2x & +0.6y & = 4.4 \\ II. & 0.8x & +0.4y & = 5.6 \end{array}$$

dabei bezeichnen $x$ (bzw. $y$) die gesuchten Mengen von Legierung $M_1$ (bzw. $M_2$) in kg.
Als Lösung erhält man: $x = 4[kg]$ und $y = 6[kg]$

## 5. Winkelfunktionen

1) Ein Pfahl von $3$ m Höhe wirft einen Schatten von $1.60$ m. Der Schatten eines Kirchturms beträgt zur gleichen Zeit $20$ m. Welche Höhe hat der Turm?

2) Ein Dreieck hat die Seitenlängen $a = 2$ cm und $b = 0.1$ cm. Geben Sie eine Abschätzung für die Länge der dritten Seite $c$.

3) Gibt es ein Dreieck mit folgenden Seitenlängen? Berechnen Sie gegebenenfalls die Fläche des Dreiecks.
a) $a = 4.1$ cm; $b = 5.3$ cm; $c = 9.6$ cm b) $a = 3$ cm; $b = 2.5$ cm; $c = 1.5$ cm

4)* Der Querschnitt eines Tunnels ist ein Halbkreis mit Durchmesser $6$ m. Am linken und am rechten Rand sind Gehsteige der Breite $1$ m abgetrennt. Wie hoch darf ein Fahrzeug höchstens sein, damit es den Tunnel gefahrlos passieren kann?

5) Rechnen Sie um

| Gradmaß | | | | $120^\circ$ | $-30^\circ$ | $20^\circ$ | $315^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bogenmaß | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{12}$ | $-\frac{3\pi}{4}$ | | | | |

6) Bestätigen Sie (mit TR)
a) $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ b) $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

7) Finden Sie ohne TR (unter Benutzung von Aufgabe 6) alle Lösungen $x \in [0, 2\pi]$ der folgenden Gleichungen
a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ c) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8) Berechnen Sie ohne TR (unter Benutzung von Aufgabe 6)
a) $\tan\frac{\pi}{6}$ b) $\tan\frac{\pi}{3}$ c) $\cos(-\frac{\pi}{4})$ d) $\tan(-\frac{\pi}{4})$ e) $\sin(-\frac{\pi}{4})$

9) Bestimmen Sie ohne TR alle reellen Lösungen der Gleichungen

a) $\sin x = -1$ b) $\tan x = 1$ c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d)* $\cos^2 x + 3\sin x = 3$

10)* Bestimmen Sie (mit TR) alle reellen Lösungen der Gleichung $\sin x = 0.8$

11) Beweisen Sie die folgenden Beziehungen

a) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ b) $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ für $0 \leq x \leq \pi$; $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ für $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

12) Bestimmen Sie die fehlenden Winkel und Seiten der rechtwinkligen Dreiecke (mit $\beta = 90^\circ$)

a) $a = 50,0cm$, $c = 78,1cm$ b) $a = 40,0cm$, $\alpha = 43,6^\circ$ c) $c = 70,0cm$, $\alpha = 18,9^\circ$ d) $b = 65,0cm$, $\gamma = 59,5^\circ$

13) Berechnen Sie die übrigen Winkel und Seiten der (beliebigen) Dreiecke, von denen folgende Größen bekannnt sind:

a) $a = 179,0m$, $b = 208,3m$, $\beta = 106,0^\circ$ b) $c = 107,6m$, $\alpha = 70,4^\circ$, $\beta = 30,3^\circ$ c) $a = 205,4m$, $b = 252,8m$, $\gamma = 47,5^\circ$ d) $a = 135,8m$, $b = 191,0m$, $c = 73,9m$

14) Berechnen Sie die Fläche eines Parallelogramms mit den Seitenlängen $a = 10m, b = 3m$ sowie dem Winkel $\alpha = 60^\circ$.

15) $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) = A\sin x + B\cos x \qquad (A = ? \qquad B = ?)$

Lösungen

1) $37.5\ m$
2) $1.9 < c < 2.1$
3a) Kein Dreieck, da $c > a + b$ b) Fläche: $\sqrt{3.5}\ cm^2 \approx 1.87\ cm^2$
4) Höhe: $\sqrt{5}\ m \approx 2.24\ m$

5)

| Gradmaß | $60^\circ$ | $15^\circ$ | $-135^\circ$ | $120^\circ$ | $-30^\circ$ | $20^\circ$ | $315^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bogenmaß | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{12}$ | $-\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{9}$ | $\frac{7\pi}{4}$ |

7a) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$ c) $\frac{7\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}$

8a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-1$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

9a) $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ b) $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ d) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

10) $\{x_0 + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ wobei $x_0 = \arcsin 0.8 \approx 0.927$ (TR)

12a) $b = 92,7cm$, $\alpha = 32,6°$, $\gamma = 57,4°$ b) $c = 42,0cm$, $b = 58,0cm$, $\gamma = 46,4°$ c) $a = 24,0cm$, $b = 74,0cm$, $\gamma = 71,1°$ c) $a = 33,0cm$, $c = 56,0cm$, $\alpha = 30,5°$

13a) $c = 68,1m$, $\alpha = 55,7°$, $\gamma = 18,3°$ b) $a = 103,2m$, $b = 55,2m$, $\gamma = 79,3°$ c) $c = 189,6m$, $\alpha = 53,0°$, $\beta = 79,5°$ d) $\alpha = 33,6°$, $\beta = 128,8°$, $\gamma = 17,6°$

14) $ab\sin\alpha = 15\sqrt{3}\,m^2$

15) $A = 1, B = \sqrt{3}$

## 6. Funktionen

1) Gegeben sind folgende Geradengleichungen:

a) $y = \frac{1}{2}x - 3$ b) $3x + 2y - 4 = 0$ c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

d) $3x - 9 = 0$ e) $4y - 2 = 0$

- Stellen Sie die Geraden in einem Koordinatensystem grafisch dar.
- Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen.

2) Bestimmen Sie die Geradengleichung $y = mx + b$ wenn folgendes bekannt ist:

a) Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y = (0;5)$ und Anstieg $m = -3$

b) Nullstelle $x = 4$ und Punkt $P(-2;6)$

c) Punkte $P_1(3;1)$ und $P_2(4;7)$

d) Punkt $P(-7;-3)$ und Anstiegswinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$

3) Gegeben sind folgende quadratische Funktionen:

a) $y = 2x^2 - 1$ b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ c) $y = -2x^2 + 4x + 6$

Wo befinden sich die Scheitelpunkte und Nullstellen der zugehörigen Graphen? Skizzieren Sie die Graphen mit Hilfe des Scheitelpunktes und der Nullstellen.

4) Schreiben Sie die folgenden Funktionen als Verkettung von zwei Funktionen $y = f(g(x))$ und bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche

a) $y = (2x + 1)^3$ b) $y = \ln(4 - x^2)$ c) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

5) Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $y = \frac{x^2 + x - 6}{x + 1}$ b) $y = \ln(10 - x^2)$ c) $y = (x^2 - 1)\cdot e^{-x}$

6) Bilden Sie zu den folgenden Funktionen $y = f(x)$ die Umkehrfunktion $f^{-1}$. Geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich von $f$ und $f^{-1}$ an.

a) $y = 5x + 3$ b) $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$

7) Entwickeln Sie die Bilder folgender Funktionen aus dem Bild der Grundfunktion.

Gehen Sie in Zwischenschritten vor. Geben Sie den Definitions– und Wertebereich an und berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionen mit den Koordinatenachsen.

| | Grundfunktion | 1.Zwischenschritt | 2.Zwischenschritt | $y(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| a) | $\sqrt{x}$ | $\sqrt{x+3}$ | $-\sqrt{x+3}$ | $-\sqrt{x+3}+1$ |
| b) | $\ln(x)$ | $\ln(x+1)$ | $-2\ln(x+1)$ | $-2\ln(x+1)+1$ |
| c) | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{x-1}$ | $\frac{2}{x-1}$ | $\frac{2}{x-1}+1$ |
| d) | $e^x$ | $e^{-x}$ | $-e^{-x}$ | $-e^{-x}+2$ |

d)* $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

8) Man skizziere (grob) das Bild der folgenden Polynome $p(x)$ mit Hilfe der Nullstellen, des Schnittpunkts mit der y-Achse sowie des Verhaltens für $x \to \pm\infty$.
a) $y = (x-3)(x-1)^2(x-4)$ b) $y = -(x+2)(x-1)^2(x-3)$
c) $y = (x^2-1)(x+1)$ d) $y = x^4 - 9x^2$

9) Skizzieren Sie das Bild der gebrochen rationalen Funktionen $r(x)$ mit Hilfe der Nullstellen, Pole und des Verhaltens für $x \to \pm\infty$.
a) $r(x) = \frac{2}{x-1}$ b) $r(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$ c) $r(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ d) $r(x) = \frac{x(x+3)}{(x+1)(x-4)x}$

Hinweis: Aufgaben 10,11 eher für Wirtschaftswissenschaftler, Aufgabe 12 eher für Ingenieure:
10) Eine Autovermietung bietet zwei Tarife A und B mit folgenden Kosten (in Euro) für ein Wochenende an:

| | Grundpreis | inklusive km | Kosten pro zusätzlichem km |
|---|---|---|---|
| Tarif A | 200 | 200 | 0.25 |
| Tarif B | 300 | 500 | 0.20 |

a) Stellen Sie die Kostenfunktionen in Abhängigkeit von gefahrenen km auf und zeichnen Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem.
b) Bei welcher Fahrleistung ist welcher Tarif günstiger?

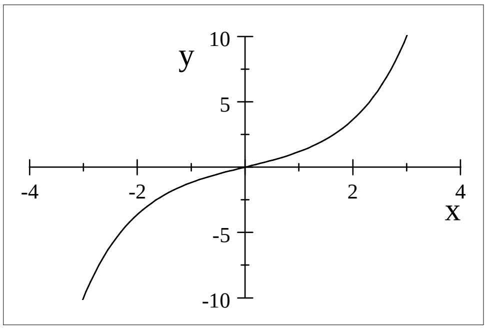
11) Ein Monopolist produziert ein gewisses Gut X. Die Kosten für die Herstellung von $x$ Einheiten betragen $K(x) = 0.2x^2 + 500000$. Bietet er auf dem Markt $x$ Einheiten an, so ergibt sich ein Verkaufspreis von $p = p(x) = 1200 - 0.2x$.
a) Stellen Sie die Absatz-Preis Funktion $x(p)$ auf.
b) Stellen Sie den Erlös als Funktion $E(x)$ der Menge $x$ dar.
c) Stellen Sie den Erlös als Funktion $E(p)$ des Preises $p$ dar.
d) Stellen Sie den Gewinn als Funktion $G(x)$ der Menge $x$ dar.
e) Für welche Mengen $x$ macht er einen Gewinn, d.h. $G(x) > 0$ ?
f) Für welche Menge $x$ ist der Gewinn maximal?

12) Mit Hilfe der Exponentialfunktion $e^x$ definiert man die beiden hyperbolischen Funktionen

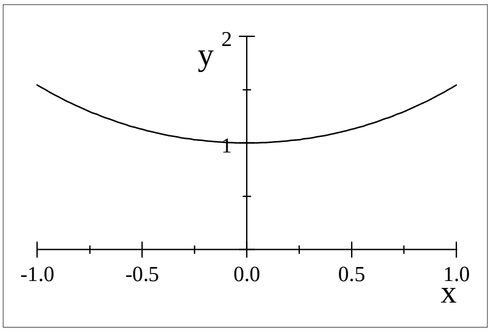
$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (Cosinus hyperbolicus oder Kettenlinie) sowie

$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (Sinus hyperbolicus)

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktionen
b) Zeigen Sie, dass für alle rellen Zahlen $x$ die Gleichung $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ gilt.
c) Zeigen Sie, dass für alle rellen Zahlen $x$ die Gleichungen $\cosh(-x) = \cosh(x)$ gilt, d.h. $\cosh x$ ist eine gerade (achsensymmetrische) Funktion
d) Zeigen Sie, dass für alle rellen Zahlen $x$ die Gleichungen $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ gilt, d.h. $\sinh x$ ist eine ungerade (punktsymmetrische) Funktion




$\sinh x$




$\cosh x$

e)* An den Spitzen von 2 Masten der Höhe $h$ wird ein Seil befestigt. Die Form des aufgehängten Seils wird durch die Funktion $y = a\cosh\frac{x}{a}$ beschrieben. Dabei ist $a$ eine Konstante, die das Verhältnis von der Horizontalkomponente der Seilkraft und der Gewichtskraft je Längeneinheit angibt. Das Koordinatensystem wird so eingerichtet, dass die Koordinaten der Fußpunkte der Masten in den Punkten $(-75m, 0m)$ und $(75m, 0m)$ liegen. Der tiefste Seilpunkt liegt $80m$ über dem Koordinatenursprung. Berechnen Sie aus den Angaben die Größen $a$ und $h$.

Lösungen

1a) Schnittpunkt mit $x$ –Achse: $S_x = (6;0), S_y = (0;-3)$
b) $S_x = (\frac{4}{3};0), S_y = (0;2)$, c) $S_x = (3;0), S_y = (0;2)$
d) $S_x = (3;0)$, e) $S_y = (0;\frac{1}{2})$
2a) $y = -3x + 5$ b) $y = -x + 4$ c) $y = 6x - 17$ d) $y = x + 4$
3a) Scheitelpunktsform $y = 2(x-0)^2 - 1$, Scheitel $S = (0;-1)$, Nullstellen $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
b) $y = -\frac{1}{2}(x-0)^2 + 2$, $S = (0;2)$, $x_{1,2} = \pm 2$
c) $y = -2(x-1)^2 + 8$, $S = (1;8)$, $x_1 = 3, x_2 = -1$
4a) $g(x) = 2x + 1$, $f(x) = x^3, D = \mathbb{R}$ b) $g(x) = 4 - x^2$, $f(x) = \ln x, D = (-2;2)$

c) $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$, $f(x) = \sqrt{x}, D = (-\infty, 1] \cup (2, \infty)$

5a) Nullstellen: $2, -3$ b) $3, -3$ c) $1, -1$

6a) $y = 5x + 3 \to x = \frac{y-3}{5} \to f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$

Definitions- und Wertebereich von $f(x)$ und $f^{-1}(x)$: $(-\infty, \infty)$

6b) $y = \frac{2x+1}{x-1} \to xy - y = 2x + 1 \to x(y-2) = y + 1 \to x = \frac{y+1}{y-2} \to f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Definitionsbereich von $f(x)$=Wertebereich von $f^{-1}(x)$ : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Definitionsbereich von $f^{-1}(x)$=Wertebereich von $f(x)$ : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

| 7) | Def.bereich | Wertebereich | Schnittpunkt mit x-Achse $S_x$ | $S_y$ |
|---|---|---|---|---|
| $-\sqrt{x+3} + 1$ | $[-3, \infty)$ | $(-\infty; 1]$ | $x = -2$ | $y = -\sqrt{3} + 1$ |
| $-2\ln(x+1) + 1$ | $(-1, \infty)$ | $(-\infty, \infty)$ | $x = \sqrt{e} - 1$ | $y = 1$ |
| $\frac{2}{x-1} + 1$ | $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $x = -1$ | $y = -1$ |
| $-e^{-x} + 2$ | $\mathbb{R}$ | $(-\infty, 2)$ | $-\ln 2$ | $y = 1$ |

d) Defintionsbereich: $(-\infty, \infty)$ Wertebereich: $[-1; 3]$

Schnittpunkte mit x-Achse: $\{\pm\frac{\pi}{3} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ Schnittpunkt mit y-Achse: $y = 3$

8a) Nullstellen: $3; 1; 4$ Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0; 12)$; $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty$

b) Nullstellen: $-2; 1; 3$ $S_y(0; 6)$; $\lim_{x\to\infty} p(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$

c) $(x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2$ Nullstellen: $-1; 1$; $S_y(0; -1)$; $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$

d) $x^4 - 9x^2 = x^2(x - 3)(x + 3)$ Nullstellen: $-3; 0; 3$; $S_y(0; 0)$; $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty$

9a) Keine Nullstelle

- Pol: $x = 1$ mit $\lim_{x\to1-0} r(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1+0} r(x) = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} r(x) = 0$

b) Keine Nullstelle

- Pol: $x = 1$ (Ordnung 2) mit $\lim_{x\to1-0} r(x) = \infty$, $\lim_{x\to1+0} r(x) = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} r(x) = 0$

c) Nullstelle: $x = -2$

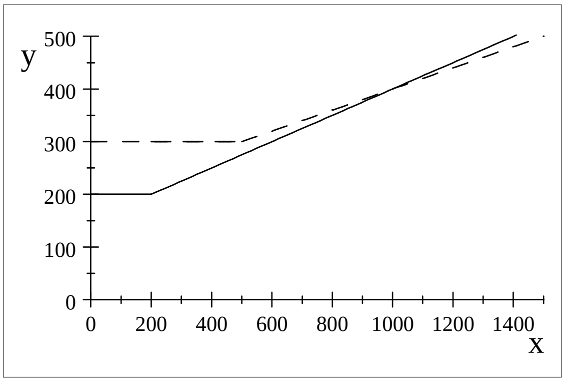
- Pole: $x = 1$ mit $\lim_{x\to1-0} r(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1+0} r(x) = +\infty$
  $x = -1$ mit $\lim_{x\to-1-0} r(x) = \infty$, $\lim_{x\to-1+0} r(x) = -\infty$,
- $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} r(x) = 0$

d) $\frac{x(x+3)}{(x+1)(x-4)x} = \frac{(x+3)}{(x+1)(x-4)}$; Nullstelle: $-3$ und hebbare Singularität für $x = 0$!

- Pole: $x = -1$ mit $\lim_{x\to-1-0} r(x) = \infty$, $\lim_{x\to-1+0} r(x) = -\infty$
  $x = 4$ mit $\lim_{x\to4-0} r(x) = -\infty$, $\lim_{x\to4+0} r(x) = \infty$,
- $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} r(x) = 0$

10) $A(x) = \begin{cases} 200 & \text{für } 0 \leq x \leq 200 \\ 200 + 0.25(x - 200) = 0.25x + 150 & \text{für } 200 < x \end{cases}$

$$B(x) = \begin{cases} 300 & \text{für } 0 \le x \le 500 \\ 300 + 0.2(x-500) = 0.2x + 200 & \text{für } 500 < x \end{cases}$$




$A(x)$ (durchgezogen), $B(x)$ (gestrichelt)

b) $0.25x + 150 = 0.2x + 200 \rightarrow x = 1000$ →Tarif A ist günstiger für $x < 1000km$

11a) $x = x(p) = 6000 - 5p$ b) $E(x) = x \bullet p(x) = 1200x - 0.2x^2$
c) $E(p) = x(p) \bullet p = 6000p - 5p^2$
d) $G(x) = E(x) - K(x) = 1200x - 0.4x^2 - 500000 = -0.4(x-1500)^2 + 400000$
e) $500 \le x \le 2500$ f) Gewinn maximal für $x = 1500$
12e) $a = 80m,$ $h = 117.81m$

## 7. Differentialrechnung

1) Differenzieren Sie folgende Funktionen

a) $y = 3x^2 + 2$ b) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ c) $y = \frac{x^2+1}{x}$ d) $y = \frac{x}{x-1}$
e) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}\,x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$ f) $y = \frac{2}{x^5} + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{2}x^{-2}$ g) $y = (ax^2 - b)^2$
h) $y = 4x + \frac{1}{x^2+1}$ i) $y = \frac{\ln x}{x}$ j) $y = (\sin x)\ln x$ k) $y = \sin(x \ln x)$
l) $y = (\ln x)^2$ m) $y = \ln\sqrt{x}$ n) $y = x^2 e^{\sqrt{x}}$ o) $y = e^{-x} - e^{-2x}$
p) $y = 5x^2 + \sin(2x)$ q) $y = \sin^2 x$ r) $y = \ln(\tan x)$ s) $y = \ln(\ln x)$
t) $y = \cosh x$ u) $y = \sinh x$ (vgl. Blatt 6/Aufgabe 12)

2) Differenzieren Sie die Funktion $f(.) = x^2 z^x + 2z - y + 1$ nach der Variablen $x$ bzw. $y$ bzw. $z$.

3) Bilden Sie die erste, zweite und dritte Ableitung von
a) $y = 5x^4 + \ln x + e^x$ b) $y = \sin^2 x$

4)* Differenzieren Sie die Funktionen mit Hilfe der Ableitungsformel für Umkehrfunktionen
a) $y = \arccos x$ b) $y = \arctan x$

Anwendungen der Differentialrechnung

5) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Gleichung der Tangente jeweils an der Stelle $x_0 = 1$ und zeichnen Sie die Kurve zusammen mit der Tangente
a) $y = x^2 - 3x + 4$  b) $y = e^x$  c) $y = \ln x$

6) Haben die folgenden Funktionen lokale Extremwerte? Argumentieren Sie nur mit Hilfe der ersten Ableitung!
a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

7) Führen Sie eine Kurvendiskussion (Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonie, lokale Extremwerte, Krümmung, Wendepunkte, Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, Wertebereich, Skizze) der folgenden Funktion durch
$y = 8x^3 - x^4$

8) Bestimmen Sie lokale Extremwerte und Wendepunkte von
a) $y = xe^x$  b) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

9) Ein in der Wirtschaft häufig zu beobachtender Wachstumsprozeß wird durch die logistische Funktion $y(t) = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}$  $(k, a, b > 0)$ beschrieben.
Wir betrachten in dieser Aufgabe speziell $y(t) = \frac{1}{1 + 3e^{-2t}}$
a) Zeigen Sie, dass $y(t)$ streng monoton wachsend ist.

b) Wann tritt eine Trendwende in der Wirtschaftsentwicklung vom überproportionalen Wachstum zum unterproportionalen Wachstum ein? Diese Frage läuft auf die Bestimmung des Wendepunktes der logistischen Funktion hinaus.
c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} y(t)$ und skizzieren Sie $y(t)$.

10) Zerlegen Sie eine positive Zahl $a$ so in zwei positive Faktoren, dass deren Summe minimal wird.

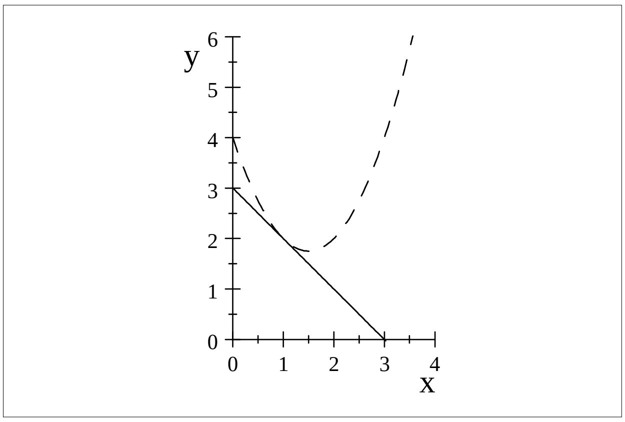
11) Der Treibstoffverbrauch $y$ (in Liter pro 100 km) in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit $x$ (in km/h) sei für ein gewisses Pkw-Modell gegeben durch
$y = f(x) = \frac{x}{9} - 3 + \frac{400}{x}$
a) Für welche konstante Geschwindigkeit $x$ wird der Verbrauch minimal ?
b) Der Mietpreis für den Pkw betrage 18 € pro Stunde sowie zusätzlich 50 € Grundgebühr. Der Treibstoff kostet 1,50 € pro Liter. Stellen Sie die Kostenfunktion $K(x)$ für die Gesamtkosten einer Fahrt von 700 km auf.
c) Welche Geschwindigkeit sollte gefahren werden, um diese Kosten zu minimieren ?

12) Ein Gemüsehändler kauft beim Erzeuger Spargel zu 3 € pro Kilogramm ein. Seinen Verkaufspreis kann er zwischen 5 € und 10 € variieren. Er weiß aus Erfahrung, dass er bei einem Preis von $x$ Euro pro Kilogramm Spargel eine Menge von $y = f(x) = 120 - 10x$ (in Kilogramm) pro Tag absetzen kann.
a) Stellen Sie eine Formel für den Gewinn $G(x)$ in Abhängigkeit vom gewählten

Verkaufspreis auf.
b) Skizzieren Sie den Graphen der Gewinnfunktion.
c) Für welchen Verkaufspreis wird der Gewinn maximal ?

<u>Lösungen</u>:

1a) $6x$ b) $3x^2 - 4x$ c) $1 - \frac{1}{x^2}$ d) $-\frac{1}{(x-1)^2}$ e) $3a^2x^2 - 2\sqrt{b}\,x + \frac{1}{2}c$
f) $-10x^{-6} - 9x^{-4} + x^{-3}$ g) $4a^2x^3 - 4abx$ h) $4 - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ i) $\frac{1-\ln x}{x^2}$
j) $(\cos x)\ln x + \frac{\sin x}{x}$ k) $(\cos(x\ln x))(\ln x + 1)$ l) $\frac{2\ln x}{x}$ m) $\frac{1}{2x}$
n) $e^{\sqrt{x}}\left(2x + \frac{1}{2}\sqrt{x^3}\right)$ o) $-e^{-x} + 2e^{-2x}$ p) $10x + 2\cos(2x)$
q) $2\sin x\cos x$ r) $\frac{1}{\sin x\cos x}$ s) $\frac{1}{x\ln x}$ t) $\sinh x$ u) $\cosh x$
2) $\frac{df}{dx} = (2x + x^2(\ln z))z^x$; $\frac{df}{dy} = -1$; $\frac{df}{dz} = x^3z^{x-1} + 2$
3a) $y' = 20x^3 + \frac{1}{x} + e^x$; $y'' = 60x^2 - \frac{1}{x^2} + e^x$; $y''' = 120x + \frac{2}{x^3} + e^x$
b) $y' = 2\sin x\cos x$; $y'' = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$; $y''' = -8\sin x\cos x$
4a) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $y' = \frac{1}{1+x^2}$
5a) Gleichung der Tangente: $y = 2 - (x-1) = 3 - x$ b) $y = e + e(x-1) = e \cdot x$
c) $y = x - 1$




$x^2 - 3x + 4$ (gestrichelt),Tangente: $3 - x$

6a) $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$, d.h. $f'(x)$ besitzt keine Nullstelle → $f(x)$ hat keinen lokalen Extremwert

6b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$ → $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ für $x < 0$ und $f'(x) < 0$ für $x > 0$ → lokales Maximum für $x = 0$

7) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$; $8x^3 - x^4 = x^3(8-x)$ →Nullstellen: $x_1 = 0, x_2 = 8$

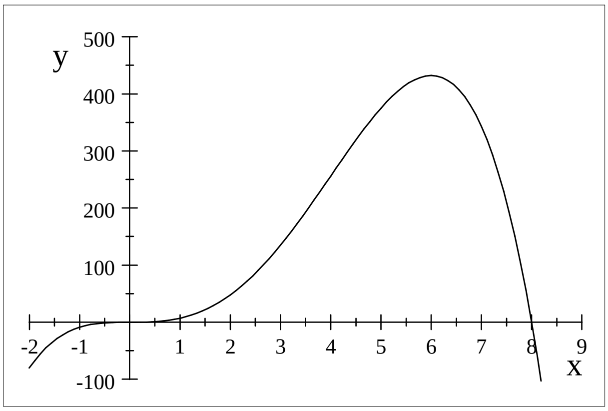
- $y' = 24x^2 - 4x^3 = 4x^2(6-x)$

→ $y' < 0$ für $x > 6$ (dort streng monoton fallend) und $y' > 0$ für $x < 6$ $(x \neq 0)$ (dort streng monoton wachsend) → Lokales Maximum an der Stelle $x_3 = 6$ $(y(6) = 432)$

- $y'' = 48x - 12x^2 = 12x(4-x)$

→ $y'' \leq 0$ für $x \leq 0$ oder $x \geq 4$ (dort konkav gekrümmt) und $y'' \geq 0$ für $0 \leq x \leq 4$ (dort konvex gekrümmt) → Wendepunkte: $x_4 = 0, x_5 = 4$

- Verhalten an den Rändern: $\lim\limits_{x\to\infty} x^3(8-x) = "\infty \cdot (-\infty)" = -\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3(8-x) = -\infty$
- Wertebereich: $W = (-\infty; 432]$




8a) $y' = e^x(x+1)$; $y'' = e^x(x+2)$; $y'' = e^x(x+3)$
- Lokale Extremwerte: $y' = 0$ nur für $x = -1$; $y''(-1) = e^{-1} > 0 \rightarrow$ lokales Minimum für $x = -1$ $(y(-1) = -e^{-1})$
- Wendepunkte: $y'' = 0$ nur für $x_1 = -2$; $y'''(-2) = e^{-2} \neq 0$ →Wendepukt für $x = -2$

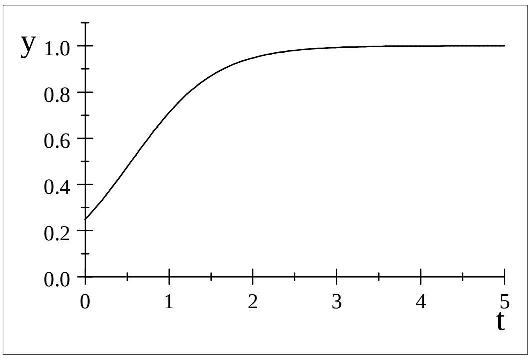
b) $y' = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; $y'' = \dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$
- Lokale Extremwerte: $y' = 0$ nur für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$; $y''(-1) > 0$ →lokales Minimum für $x = -1$ $(y(-1) = -\frac{1}{2})$, $y''(1) < 0$ →lokales Maximum für $x = 1$
- Wendepunkte: $y'' = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \dfrac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

Nenner $(x^2+1)^3$ ist stets $> 0$; Zähler wechselt sein Vorzeichen für $x_3 = -\sqrt{3}, x_4 = 0$ und $x_5 = \sqrt{3}$
→Wendepunkte für diese Werte. (Alternativ: $y''(-\sqrt{3}) = 0$ und $y'''(-\sqrt{3}) \neq 0$ usw.)

9a) $\dot{y}(t) = 6\dfrac{e^{-2t}}{(3e^{-2t}+1)^2}$ ist stets $> 0 \rightarrow y(t)$ ist streng monoton wachsend.

b) $\ddot{y}(t) = 12e^{-2t}\dfrac{3e^{-2t}-1}{(3e^{-2t}+1)^3}$; $\ddot{y}(t)$ wechselt sein Vorzeichen bei $t = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} \approx 0.55$ (Jahren)

c) $\lim\limits_{x\to\infty} y(t) = 1$




10) Suche die Extremwerte von $x + y$ unter der Nebenbedingung $a = xy$
$\rightarrow$ suche die Extremwerte von $f(x) = x + \frac{a}{x} \rightarrow f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2a}{x^3}$ →Minimum für $x = \sqrt{a}\ (= y)$

11a) $f'(x) = \frac{1}{9} - \frac{400}{x^2} = 0$ für $x = 60$; $f''(x) = \frac{800}{x^3} \rightarrow f''(60) > 0$ →Minimum für $x = 60$

b) $K(x) = 50 + 18 \cdot \underbrace{\frac{700}{x}}_{\text{Mietdauer}} + 1.5 \cdot \underbrace{7 \cdot \left(\frac{x}{9} - 3 + \frac{400}{x}\right)}_{\text{Verbrauch für 700km}} = 18.5 + \frac{16800}{x} + \frac{7x}{6}$

c) Minimum für $x = 120$

12a) $G(x) =$ Erlös - Kosten $=$ Menge $\cdot$ V-Preis $-$ Kosten $=$ Menge $\cdot$ (V-Preis $-$ E-Preis)$=$

$= (120 - 10x)(x - 3) = -10x^2 + 150x - 360 = -10(x - 7.5)^2 + 202.5$

c) Scheitelpunkt von $G(x)$: $(7.5; 202.5)$ →maximaler Gewinn für $x = 7.5$€

## 8. Integralrechnung

1) Berechnen Sie $\int f(x)dx$ für

a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4$ b) $f(x) = bx^2 - ax + d$ c) $f(x) = -(4 - \frac{1}{2}x + e^x)$

d) $f(x) = 2x^{-4} + \frac{3}{x} - 5x$ e) $f(x) = \frac{x^2}{a} + \frac{a}{x^2}$ f) $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{4x^2}$

g) $f(x) = 2x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{\sqrt{x}}$ h) $f(x) = \cos x - \frac{3}{\cos^2 x}$ i) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$

j) $f(x) = \frac{\sin(2x) + \sin x}{2\sin x}$

2) Berechnen Sie mit Hilfe von linearer Substitution $\int f(x)dx$ für

a) $f(x) = \cos(3x + 4)$ b) $f(x) = e^{5x+2}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{2}x)^4}$

d) $\frac{4}{(1 + x)^7}$ e) $\frac{4}{(1 + 2x)}$

3) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

a) $\int_{-1}^{1}(x + 1)dx$ b) $\int_{1}^{2}(x^2 + 1)dx$ c) $\int_{1}^{8}\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx$

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx$ e) $\int_{1}^{\ln 5} e^x dx$ f) $\int_{1}^{4}\frac{1}{x}dx$

4) Wie groß ist der Inhalt der Flächenstücke, die durch die folgenden Kurven begrenzt sind? Skizzieren Sie die Kurven!

a) $y = 3 - 2x - x^2$ und $y = 0$

b) $y = x(x - 1)(x - 2)$ und $y = 0$

c) $y = e^x, y = 10$ und $x = 0$

d) $y = x - 1, y = e^{-x} - 2, x = 0$ und $x = 3$

e) $y = \frac{1}{x}, x = 1$ und $x = 10$

f) Teilen Sie das Flächenstück in Aufgabe e) durch die Geraden $x = a$ und $x = b$ in drei gleich große Flächenstücke auf. Wie groß sind $a$ und $b$?

Lösungen

1a) $\int 4x^3 - 2x^2 + 4 = x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 4x + c$ ($c$ wird bei den nachfolgenden Lösungen weggelassen)

b) $\frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{2}ax^2 + dx$ c) $\frac{1}{4}x^2 - e^x - 4x$ d) $-\frac{2}{3}x^{-3} + 3\ln|x| - \frac{5}{2}x^2$

e) $\frac{x^3}{3a} - \frac{a}{x}$ f) $\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}\ln|x|$ g) $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{3}} + 6\sqrt{x}$

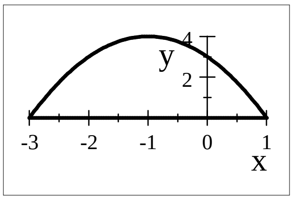
h) $\sin x - 3\tan x$ i) $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$ j) $\sin x + \frac{1}{2}x$

2a) $\frac{1}{3}\sin(3x+4)$ b) $\frac{1}{5}e^{5x+2}$ c) $\frac{6}{7}(1+\frac{1}{2}x)^{\frac{7}{3}}$

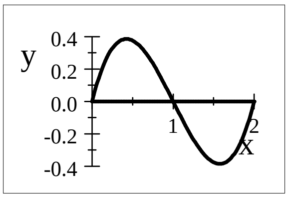
d) $\frac{-2}{3(1+x)^6}$ e) $2\ln|1+2x|$

3a) $2$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ e) $5 - e$ f) $\ln 4$

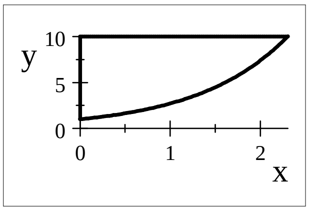
4a) Flächeninhalt: $\frac{32}{3}$



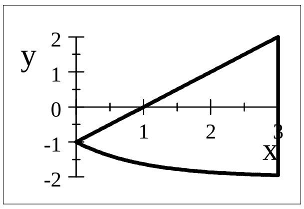

4b) Flächeninhalt: $\frac{1}{2}$



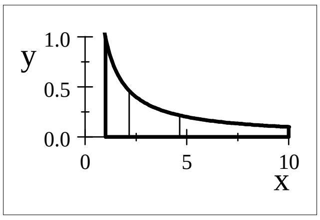

4c) Flächeninhalt: $10(\ln 10) - 9$




4d) Flächeninhalt: $\int_0^3 ((x-1) - (e^{-x} - 2))dx = 6.55$




4e) Flächeninhalt: $\ln 10$; $a = 10^{\frac{1}{3}}; b = a^2 = 10^{\frac{2}{3}}$




## 9. Vektorrechnung

1) Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ die Vektoren

a) $\vec{x} = 2\,\vec{x}_1 + 3\,\vec{x}_2 - 4\,\vec{x}_3$ b) $\vec{x} = 5\,\vec{x}_1 - (\vec{x}_2 - 2\,\vec{x}_3)$

2) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ für

a) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ und $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ b) $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 3$ und $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$

c) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Ermitteln Sie bei c) und d) auch den von den Vektoren eingeschlossenen Winkel.

3) Gegeben sind $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$. Bestätigen Sie die Gleichheit von

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ und $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

4) Gegeben sind $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Für welche Zahl $\lambda$ steht $\vec{a} + \lambda\,\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{c}$?

5) Berechnen Sie den Vektor $\vec{a}$ der parallel zu $\vec{x}$ ist und die Länge 1 hat.

a) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

6) Gegeben sind $\vec{a}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ermitteln Sie alle Vektoren $\vec{x}$ mit der Länge $\sqrt{6}$, die senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen.

7) Geben Sie einen winkelhalbierenden Vektor zu $\vec{a}=\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ an.

8) Gegeben sind die Punkte $A = (0;0), B = (1;3)$ und $C = (-1;1)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Seite $\vec{BC}$

9) Unter welchen Bedingungen (an den Zwischenwinkel $\angle(\vec{a},\vec{b})$) ist $|\vec{a} + \vec{b}|$ kleiner, gleich oder größer als $|\vec{a} - \vec{b}|$?

<u>Lösungen:</u>

1a) $\vec{x}=\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$ b) $\vec{x}=\begin{bmatrix} 7 \\ -11 \\ 10 \end{bmatrix}(7;-11;10)$

2a) $6$ b) $-9\sqrt{3}$ c) $30, \angle(\vec{a},\vec{b}) = 30,7^\circ$ c) $0, \angle(\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ$

3a) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

4) $\lambda = \frac{1}{10}$

5a) $\frac{1}{\sqrt{157}}\begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

6) $\vec{x}_1=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x}_2= -\vec{x}_1$

7) Vielfache von $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

8) $(0;2)$

9) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$ für $90^\circ < \angle(\vec{a},\vec{b}) \leq 180^\circ$
$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ für $90^\circ = \angle(\vec{a},\vec{b})$
$|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$ für $0^\circ \leq \angle(\vec{a},\vec{b}) < 90^\circ$