



0 Inhaltsverzeichnis

0 Inhaltsverzeichnis	1
1 Einleitung	4
2 Widerstandsnetzwerke	6
2.1 Grundlagenwissen	6
2.1.1 Der elektrische Widerstand	6
2.1.2 Bemessungsgleichungen, Abhängigkeit von der Temperatur	7
2.1.3 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen	9
2.1.4 Stern-Dreieck-Umrechnung	14
2.1.5 Knotenpunktsatz und Maschensatz	16
2.1.6 Strom- und Spannungsteilerregel	22
2.2 Übungsaufgaben	27
2.2.1 Aufgabe 1	27
2.2.2 Aufgabe 2 (Endrunde 1997)	30
2.2.3 Aufgabe 3 (Endrunde 2010)	30
2.3 Experimentelle Untersuchungen	31
2.3.1 Widerstandsnetzwerk I	31
2.3.2 Widerstandsnetzwerk II	32
2.4 Ergänzung: Widerstandsfiguren	33
2.4.1 Der „Widerstandswürfel“	33

3 Grundstromkreis	36
3.1 Grundlagenwissen	36
3.1.1 Modellierung des elektrischen Stromkreises: aktiver und passiver Zweipol	36
3.1.2 Normierung und Lastfälle	38
3.1.3 Leistung und Wirkungsgrad	41
3.2 Übungsaufgaben	44
3.2.1 Aufgabe 1 (Endrunde 2001)	44
3.2.2 Aufgabe 2 (Endrunde 1997)	46
3.2.3 Aufgabe 3 (Endrunde 2010)	46
3.2.4 Aufgabe 4 (Endrunde 2009)	47
3.3 Experimentelle Untersuchungen zum Grundstromkreis	47
3.3.1 Versuchsziel	47
3.3.2 Versuchsvorbereitung	47
3.3.3 Versuchsdurchführung	48
3.3.4 Auswertung	50
3.4 Ergänzung: Technische Ausführungen von Quellen	55
3.4.1 Elektrochemische Spannungsquellen	55
3.4.2 Elektronische Gleichspannungsquellen	56
4 Elektrisches Feld	57
4.1 Grundlagenwissen	57
4.1.1 Zum Feldbegriff	57
4.1.2 Feldgrößen des elektrischen Ladungsfeldes	59
4.1.3 Kapazität	63
4.1.4 Kondensatorschaltungen	67
4.1.5 Lade- und Entladevorgänge an Kondensatoren	72
4.1.6 Energie und Kräfte im elektrostatischen Feld	76
4.1.7 Bewegung freier Ladungen im elektrostatischen Feld	79
4.2 Übungsaufgaben	82
4.2.1 Aufgabe 1 (Vorrunde 2010)	82
4.2.2 Aufgabe 2 (Endrunde 2000)	83

4.2.3 Aufgabe 3 (Endrunde 2009)	83
4.3 Experimentelle Untersuchungen zum elektrischen Feld	84
4.3.1 Versuchsziel	84
4.3.2 Versuchsvorbereitung	84
4.3.3 Versuchsdurchführung	85
4.3.4 Versuchsauswertung	87
5 Magnetisches Feld	90
5.1 Grundlagenwissen	90
5.1.1 Magnetische Erscheinungen	90
5.1.2 Physikalische Größen zur Beschreibung des Magnetfeldes	92
5.1.3 Durchflutungsgesetz	97
5.1.4 Gesetz von Biot-Savart	102
5.1.5 Berechnung magnetischer Felder und Kreise	103
5.1.6 Kräfte im magnetischen Feld	106
5.1.7 Induktionsgesetz	113
5.2 Übungsaufgaben	118
5.2.1 Aufgabe 1 (Endrunde 2010)	118
5.2.2 Aufgabe 2 (Endrunde 2004)	120
5.2.3 Aufgabe 3 (Endrunde 2005)	120
5.3 Experimentelle Untersuchungen Kraftwirkungen in magnetischen Feldern	121
5.3.1 Versuchsziel	121
5.3.2 Versuchsvorbereitung	121
5.3.3 Versuchsdurchführung	122
5.3.4 Versuchsauswertung	124
6 Literaturhinweise	128
7 Anhang A: Begriffsübersicht Deutsch – Englisch	129

1 Einleitung

Dieses Skript soll Ihnen bei der Vorbereitung auf die Endrunde der internationalen Elektrotechnik-Olympiade „Neisse-Elektro 2000“ helfen. Es ist in 4 Workshops gegliedert, zu denen auch entsprechende Veranstaltungen angeboten werden:

1. Widerstandsnetzwerke
2. Grundstromkreis
3. Elektrisches Feld
4. Magnetisches Feld

Jeder Workshop hat den gleichen Aufbau:

- Grundlagenwissen
- Übungsaufgaben
- Laborversuche

Im Abschnitt „Grundlagenwissen“ finden Sie theoretische Grundlagen zum jeweiligen Workshop. Manches wird Ihnen hier sicher noch aus dem Unterricht in Erinnerung sein. Bei den Übungsaufgaben wird jeweils für die erste Aufgabe der Lösungsweg demonstriert, es folgen weitere Aufgaben, bei deren Lösung Sie Ihr Wissen anwenden und testen können. Versuchen Sie diese Aufgaben wenn möglich unter Wettbewerbsbedingungen, das heißt nur mit der zur Endrunde zugelassenen Formelsammlung zu lösen. Sie können sich die Formelsammlung unter http://www.f-ei.hs-zigr.de/fileadmin/user_upload/Redakteure/F_EI/Neisse_Elektro/pdf/ulohy/Neisse_Elektro_Formelsammlung.pdf downloaden und ausdrucken. Die jeweils letzte Aufgabe ist, wie auch die Aufgaben bei der Endrunde der Neisse-Elektro, in Englisch. Weitere Aufgaben finden Sie unter <http://www.f-ei.hs-zigr.de/index.php?id=55>. In den Laborversuchen können Sie die rechnerisch gefundenen Lösungen auf ihre Praxistauglichkeit testen. Hierzu haben wir ausgewählte Aufgabenstellungen angepasst.

Am Ende des Skripts finden Sie noch Hinweise zum Weiterlesen und ein Fachwortverzeichnis deutsch/englisch. Für unsere polnischen und tschechischen Olympioniken besteht die Möglichkeit, hier auch die entsprechenden Begriffe in Polnisch oder Tschechisch nachzutragen.

Und nun: **Viel Erfolg!**

2 Widerstandsnetzwerke

2.1 Grundlagenwissen

2.1.1 Der elektrische Widerstand

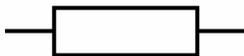
Unter Widerstand wollen wir eine „stromhemmende“ Eigenschaft verstehen. Ein Strom, der durch einen Widerstand fließt, ruft einen proportionalen Spannungsabfall hervor (ohmsches Gesetz):

$$R = \frac{U}{I} \quad [R] = 1\Omega$$

Der Kehrwert des Widerstandes wird als Leitwert G bezeichnet:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} \quad [G] = 1S$$

Sein Schaltzeichen kennen Sie sicher schon¹:



Dieses Schaltzeichen symbolisiert das „ideale Bauelement“, es besitzt nur die eine beschriebene Eigenschaft „Widerstandswert“. Die in der Praxis verwendeten Bauelemente besitzen darüber hinaus noch weitere Eigenschaften (z.B. Induktivität oder Kapazität). Wird ein Widerstand von Strom durchflossen so führt der Spannungsabfall zu einem Leistungsumsatz (elektrische Energie wird in eine andere Energieform, z.B. Wärme umgewandelt):

$$P = U * I \quad [P] = 1W$$

¹ Es gibt weitere Schaltzeichen, z.B. für nichtlineare oder für veränderbare Widerstände

Personen:

Georg Simon Ohm lebte von 1789 bis 1854 und war ein deutscher Physiker. Den nach ihm benannten Zusammenhang entdeckte er 1826. Ohm musste übrigens sein Studium wegen finanzieller Schwierigkeiten abbrechen.



Ernst Werner von Siemens lebte von 1816 bis 1892. Er war nicht nur als Unternehmer erfolgreich (er hat die heutige Siemens AG gegründet), sondern entdeckte auch das dynamoelektrische Prinzip, entwickelte einen Zeigertelegraphen und gilt als Begründer der Galvanotechnik.



Bildquelle: <http://www.zeno.org>

Zenodot Verlagsgesellschaft mbH

Beispiel:

Durch eine Glühlampe fließt bei einer Spannung von $U = 230\text{V}$ ein Strom $I = 0,45\text{ A}$. Wie groß sind Widerstand und Leitwert der Lampe?

$$R = \frac{U}{I} = \frac{230\text{V}}{0,45\text{A}} = \underline{\underline{511\Omega}}$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{0,45\text{A}}{230\text{V}} = \underline{\underline{1,96\text{mS}}} = \frac{1}{R}$$

2.1.2 Bemessungsgleichungen, Abhängigkeit von der Temperatur

Der elektrische Widerstand eines Leiters hängt von verschiedenen physikalischen Größen ab:

- Dem Leiterquerschnitt A
- Der Länge des Leiters l
- Vom spezifischen Leitwert des Leitermaterials χ bzw. von dessen spezifischen Widerstand ρ

$$R = \frac{\rho * l}{A} = \frac{l}{\chi * A}$$

Die materialspezifischen Werte χ und ρ sind temperaturabhängig, die Werte werden deshalb für eine Temperatur von 20°C angegeben.

Der Temperaturkoeffizient α gibt die Widerstandsänderung eines Leiters mit einem Widerstandswert von 1 Ω bei einer Temperaturzunahme von 1 K (Kelvin) an². Damit gilt für die Temperaturabhängigkeit des Widerstandswertes:

$$R_w = R_{20} * (1 + \alpha * \Delta v) \quad R_w \text{ Warmwiderstand, } R_{20} \text{ Widerstandswert bei } 20^\circ\text{C}$$

Materialien mit positivem Temperaturkoeffizienten bezeichnet man als Kaltleiter (ihr Widerstand nimmt mit steigender Temperatur zu), im umgekehrten Fall spricht man von Heißleitern (hierfür ist Kohlenstoff ein Beispiel).

Tabelle 1 enthält die genannten Kenngrößen für einige Materialien.

Werkstoff	χ in $\frac{m}{\Omega * mm^2}$	ρ in $\frac{\Omega * mm^2}{m}$	α in $10^{-3} * \frac{1}{K}$
Silber	61,3	0,0163	3,8
Kupfer	56	0,0179	3,93
Konstantan	2	0,5	-0,004
Wolfram	18	0,0556	4,1
Kohlenstoff	0,029	35	-0,5

Tabelle 1: Leiterwerkstoffe

Beispiel:

Der Wolfram-Glühfaden einer Glühlampe 230V/60 W ist 2m lang und wird im Betrieb 2200°C heiß. Wie groß ist der Durchmesser des Glühfadens, wie groß ist der Strom I_{20} beim

² Ganz genau genommen muss bei der Temperaturabhängigkeit, vor allem im Bereich ab 200°C, noch ein zweiter Koeffizient β berücksichtigt werden.

Einschalten der Lampe, wenn der Glühfaden eine Temperatur von 20°C hat? In welchem Verhältnis steht der Einschaltstrom zum Nennstrom der Lampe?³

$$R_w = \frac{U^2}{P} = \frac{230V * 230V}{60W} = \underline{\underline{882\Omega}}$$

$$R_{20} = \frac{R_w}{(1 + \alpha * \Delta v)} = \frac{882\Omega}{1 + 4,1 * 10^{-3} \frac{1}{K} * 2180K} = \underline{\underline{88,7\Omega}}$$

$$A = \frac{l}{\chi * R} = \frac{2m}{18m/\Omega mm^2 * 88,7\Omega} = \underline{\underline{1,25 * 10^{-3} mm^2}}$$

$$d = \sqrt{\frac{A * 4}{\pi}} = \sqrt{\frac{1,25 * 10^{-3} mm^2 * 4}{\pi}} = \underline{\underline{0,039mm}}$$

$$I_{20} = \frac{U}{R_{20}} = \frac{230V}{88,7\Omega} = \underline{\underline{2,59A}}$$

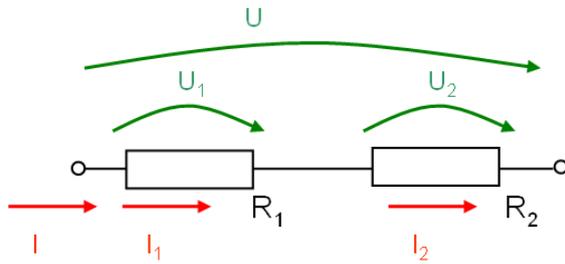
$$\frac{I_{20}}{I} = \left(\frac{2,59A}{60W/230V} \right) = \underline{\underline{9,9}}$$

2.1.3 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

In der Praxis hat man es in der Regel nicht mit einem einzelnen Widerstand sondern mit verschiedenen Widerstandskombinationen zu tun. Dabei ist es für die Betrachtungen oft nützlich, verschiedene Kombinationen zu einem Ersatzwiderstand zusammenzufassen.

Prinzipiell lassen sich die Reihen- und die Parallelschaltung unterscheiden.

³ Angaben für Lampe entnommen aus <http://home.howstuffworks.com/light-bulb1.htm>



Für die Reihenschaltung gelten folgende Regeln:

$$R = R_1 + R_2 \quad G = \frac{G_1 * G_2}{G_1 + G_2} \quad \frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}$$

$$U = U_1 + U_2 \quad I = I_1 = I_2$$

Beispiel:

Zwei Widerstände $R_1 = 1\text{k}\Omega$ und $R_2 = 0,5\text{k}\Omega$ sind in Reihe an eine Spannungsquelle mit $U = 15\text{V}$ angeschlossen. Wie groß ist der Ersatzwiderstand für die Reihenschaltung der beiden Widerstände? Welche Spannung liegt über dem Widerstand R_1 , welcher Strom fließt durch die Schaltung?

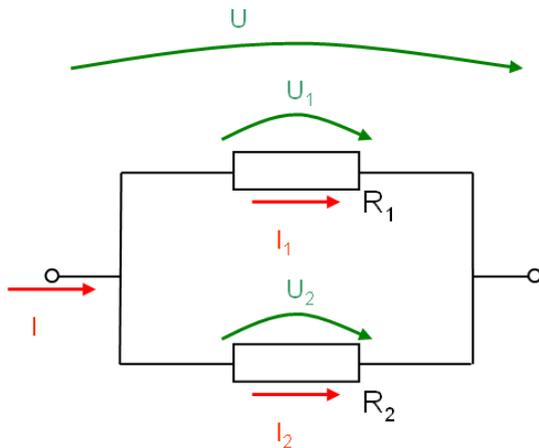
$$R = R_1 + R_2 = 1\text{k}\Omega + 0,5\text{k}\Omega = \underline{\underline{1,5\text{k}\Omega}}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{15\text{V}}{1,5\text{k}\Omega} = \underline{\underline{10\text{mA}}}$$

$$U_1 = I * R_1 = 10\text{mA} * 1\text{k}\Omega = \underline{\underline{10\text{V}}}$$

Selbstverständlich lassen sich die Gleichungen auch auf Reihenschaltungen mehrerer Widerstände erweitern, für den Ersatzwiderstand gilt:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \quad R = \sum_1^n R_v$$



Für die Parallelschaltung gilt:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad R = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} \quad G = G_1 + G_2$$

$$I = I_1 + I_2 \quad U = U_1 = U_2$$

Beispiel:

Zwei Widerstände $R_1 = 1\text{k}\Omega$ und $R_2 = 0,5\text{k}\Omega$ sind parallel an eine Spannungsquelle mit $U = 15\text{V}$ angeschlossen. Wie groß ist der Ersatzwiderstand für die Parallelschaltung der beiden Widerstände? Welcher Strom fließt durch den Widerstand R_1 , welcher Strom fließt durch die Schaltung?

$$R = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1\text{k}\Omega * 0,5\text{k}\Omega}{1\text{k}\Omega + 0,5\text{k}\Omega} = \underline{\underline{0,33\text{k}\Omega}}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{15\text{V}}{0,33\text{k}\Omega} = \underline{\underline{45\text{mA}}}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{15\text{V}}{1\text{k}\Omega} = \underline{\underline{15\text{mA}}}$$

Wollen wir wieder mehr als 2 Widerstände betrachten, so gilt für den Ersatzleitwert:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n \qquad G = \sum_1^n G_v$$

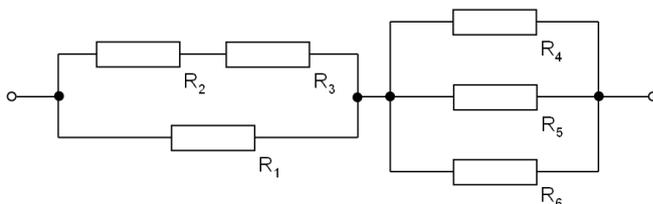
Für den Gesamtwiderstand gilt:

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)^{-1}$$

Bei gemischten Schaltungen, d.h. Netzwerken mit Reihen- und Parallelschaltungen geht man schrittweise vor, d.h. man fasst jeweils Reihen- bzw. Parallelschaltungen zu einem Ersatzwiderstand zusammen.

Beispiel:

Berechnen Sie den Ersatzwiderstand des dargestellten Netzwerks ($R_{1\dots 6} = 100\Omega$)!

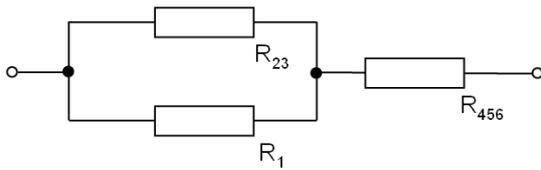


Die Widerstände R_2 und R_3 sind in Reihe, R_4 , R_5 und R_6 parallel geschaltet.

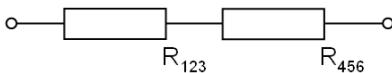
$$R_{23} = R_2 + R_3 = \underline{200\Omega}$$

$$R_{456} = \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right)^{-1} = \underline{33,3\Omega}$$

Mit den Zwischenergebnissen erstellen wir eine Ersatzschaltung, die weiter zusammengefasst wird.



$$R_{123} = \left(\frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_1} \right)^{-1} = \underline{\underline{66,6\Omega}}$$



$$R_{123456} = R = R_{123} + R_{456} = \underline{\underline{100\Omega}} \quad 4$$

Sonderfall: Zusammenschaltung gleich großer Widerstände

Werden gleich große Widerstände in Reihe oder parallel geschaltet, so gilt für die Reihenschaltung von n Widerständen:

$$R_{1\dots n} = n * R_x$$

Zwei gleiche Widerstände in Reihe ergeben also einen verdoppelten Wert, drei Widerstände den dreifachen Wert eines Einzelwiderstands.

Analog gilt für die Parallelschaltung:

$$R_{1\dots n} = \frac{R_x}{n}$$

Der Ersatzwiderstand aus der Parallelschaltung von zwei gleichen Widerständen hat den halben Wert eines Einzelwiderstands.

⁴ Die Verwendung solch langer Indizes wie hier ist sicher „Geschmackssache“, verhindert aber, dass man einzelne Widerstände bei der Berechnung vergisst.

2.1.4 Stern-Dreieck-Umrechnung

Es gibt Widerstandsschaltungen, deren Ersatzwiderstand sich nicht durch unmittelbare Anwendung von Reihen- oder Parallelschaltung ermitteln lässt. Hier lässt sich ein Teil der Schaltung „herauslösen“ und durch eine andere Schaltung ersetzen.

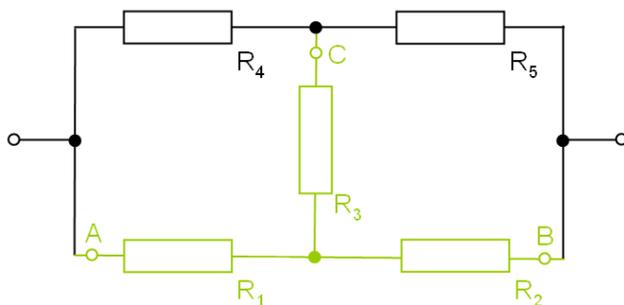


Abbildung 1: Sternschaltung

Im Beispiel wird der aus den Widerständen R_1 , R_2 und R_3 gebildete „Stern“ an den Klemmen A, B, C durch ein „Dreieck“ R_a , R_b und R_c mit gleichen Eigenschaften an den Klemmen A, B und C ersetzt:

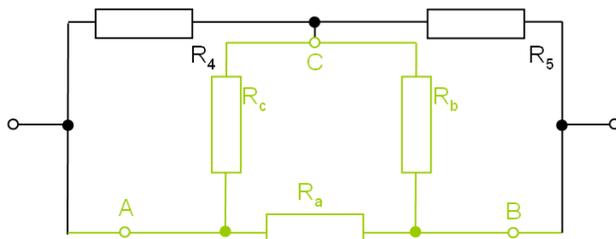


Abbildung 2: Dreieckschaltung

Wie im Bild zu erkennen, lassen sich jetzt Zusammenfassungen, z.B. durch die Parallelschaltung R_4 und R_c , durchführen.

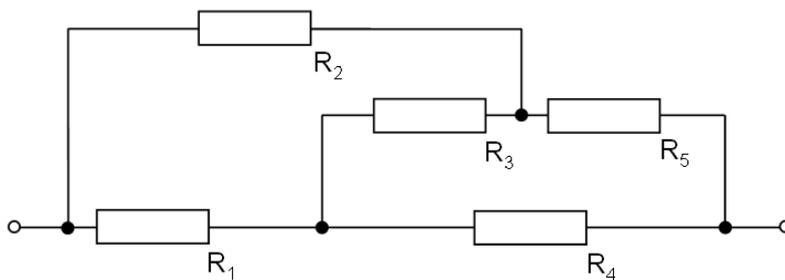
Die Formeln für die Umrechnung der Widerstände untereinander lauten:

$$R_1 = \frac{R_a * R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad R_2 = \frac{R_a * R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad R_3 = \frac{R_b * R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

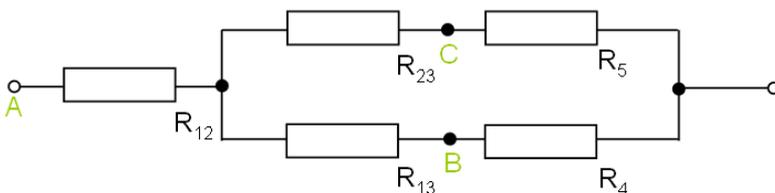
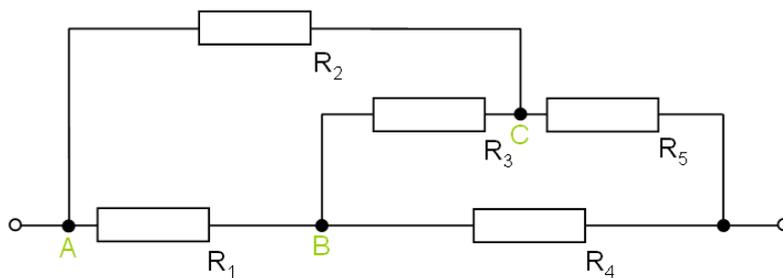
$$R_a = R_1 + R_2 + \frac{R_1 * R_2}{R_3} \quad R_b = R_2 + R_3 + \frac{R_2 * R_3}{R_1} \quad R_c = R_1 + R_3 + \frac{R_1 * R_3}{R_2}$$

Beispiel:

Berechnen Sie den Ersatzwiderstand des dargestellten Netzwerks ($R_{1...5} = 12\Omega$)!



Zur Berechnung des Ersatzwiderstands muss man zunächst eine Stern-Dreieck-Umrechnung des Sterns $R_2 - R_3 - R_5$ bzw. eine Dreieck-Stern-Umwandlung von $R_1 - R_2 - R_3$ durchführen. Wir wählen im Beispiel die letztgenannte Methode:



Wegen $R_{1...5} = R = 12\Omega$ gilt für die Ersatzwiderstände $R_{12} = R_{23} = R_{13} = \frac{R}{3} = 4\Omega$ (s.o.).

Damit ergibt sich für den Ersatzwiderstand des Netzwerkes:

$$R_{Ers} = R_{12} + \left[(R_{23} + R_5) // (R_{13} + R_4) \right] = 4\Omega + [16\Omega // 16\Omega] = \underline{\underline{12\Omega}}$$

2.1.5 Knotenpunktsatz und Maschensatz

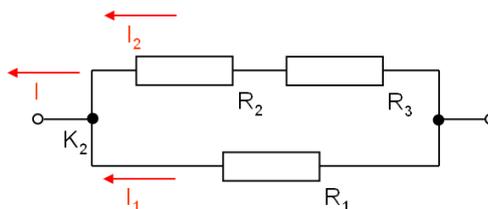
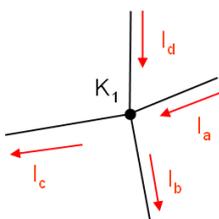
Knotenpunkt- und Maschensatz sind auch als Kirchhoffsche Regeln bekannt. Sie beschreiben jeweils den Zusammenhang zwischen mehreren elektrischen Strömen und zwischen mehreren elektrischen Spannungen in elektrischen Netzwerken. Sie sind Schlussfolgerungen aus den physikalischen Erhaltungssätzen.

Der **Knotenpunktsatz (1. Kirchhoffsche Regel)** lautet:

„In einem Knotenpunkt eines elektrischen Netzwerkes ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme“

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

Am Knotenpunkt werden also keine Ladungen, erzeugt, vernichtet oder gespeichert, alle zufließenden Ladungsträger müssen auch wieder abfließen. Für die Vorzeichen vereinbaren wir, dass zum Knoten hin fließende Ströme mit negativen Vorzeichen, aus dem Knoten heraus fließende Ströme hingegen mit positivem Vorzeichen gezählt werden:

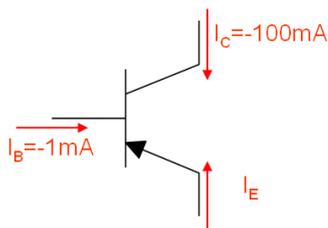


Knoten K₁:

$$-I_a + I_b + I_c - I_d = 0$$

Knoten K₂:

$$I - I_1 - I_2 = 0 \quad I = I_1 + I_2$$

Beispiel 1:Berechnen Sie den Strom I_E am Transistor!

Wir betrachten den Transistor als Knotenpunkt, beachten Sie die Vorzeichenwechsel:

$$-I_c - I_E - I_B = 0$$

$$-I_E = I_B + I_C$$

$$-I_E = -1mA + (-100mA)$$

$$\underline{I_E = 101mA}$$

Beispiel 2:

In einen Knotenpunkt fließen die Ströme $I_1 = 100mA$ sowie, $I_2 = 200mA$ hinein und die Ströme I_3, I_4, I_5 heraus. Wie groß ist I_4 , wenn $I_3 = 50mA$ und $I_5 = 80mA$ betragen?

$$-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

$$I_4 = I_1 + I_2 - I_3 - I_5$$

$$I_4 = 100mA + 200mA - 50mA - 80mA$$

$$\underline{I_4 = 170mA}$$

Der **Maschensatzsatz (2. Kirchhoffsche Regel)** hat folgenden Inhalt:

„Alle Teilspannungen eines Umlaufs bzw. einer Masche in einem elektrischen Netzwerk addieren sich zu Null.“

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$

Wir wollen unter einer Masche einen geschlossenen Umlauf entlang von Spannungspfeilen, z.B. in einem Netzwerk verstehen. Dabei gilt:

1. Jedem „spannungsbildenden“ Element (Quelle, Widerstände, andere Schaltelemente) ist ein Spannungspfeil zuzuordnen, Vorzeichen und Pfeilrichtung kennzeichnen die Polarität der Spannung
2. Die Masche wird in einem beliebigen Umlaufsinn durchlaufen
3. Erfolgt der Umlauf in Richtung eines Spannungspfeils, so wird die entsprechende Spannung positiv gezählt, ansonsten negativ

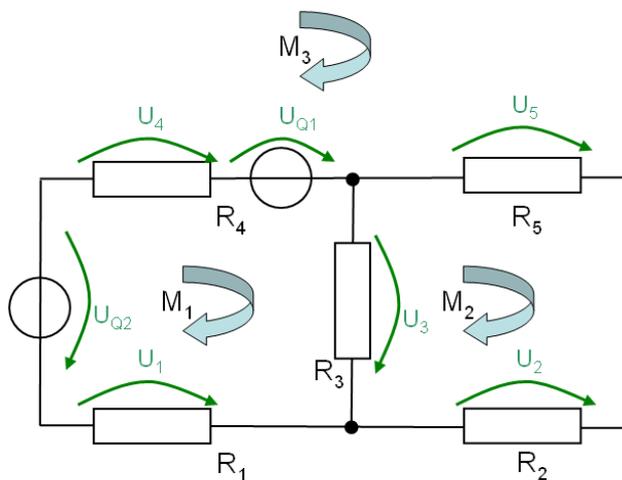


Abbildung 3: Anwendung des Maschensatzes

Im dargestellten Fall sind 3 verschiedene Maschenumläufe möglich:

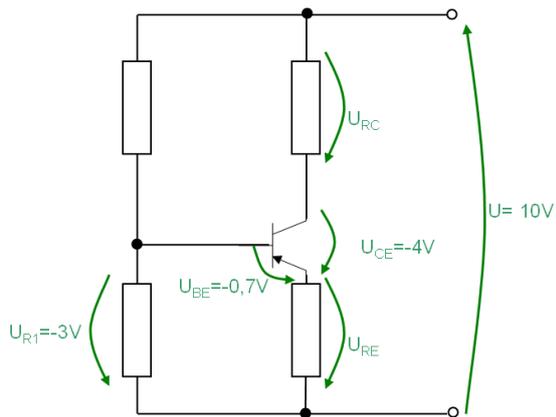
$$\text{Masche 1: } U_4 + U_{Q1} + U_3 - U_1 - U_{Q24} = 0$$

$$\text{Masche 2: } U_5 - U_2 - U_3 = 0$$

$$\text{Masche 3: } U_4 + U_{Q1} + U_5 - U_2 - U_1 = 0$$

Beispiel:

Berechnen Sie die Spannung U_{RC} !



Zunächst wird der Spannungswert für U_{RE} ermittelt:

$$U_{RE} - U_{R1} + U_{BE} = 0$$

$$U_{RE} = U_{R1} - U_{BE} = -3V + 0,7V = \underline{\underline{-2,3V}}$$

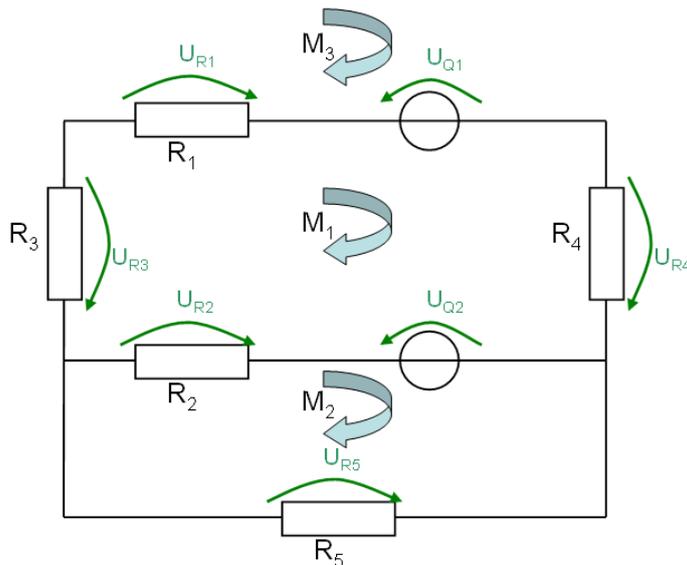
Jetzt können wir den Maschensatz zur Bestimmung von U_{RC} erneut anwenden:

$$U_{RC} + U_{CE} + U_{RE} + U = 0$$

$$U_{RC} = -U - U_{CE} - U_{RE} = -10V + 4V + 2,3V = \underline{\underline{-3,7V}}$$

Beispiel 2:

Stellen Sie für das Netzwerk die Maschengleichungen auf:



$$M_1: U_{R1} - U_{Q1} + U_{R4} + U_{Q2} - U_{R2} - U_{R3} = 0$$

$$M_2: U_{R2} - U_{Q2} - U_{R5} = 0$$

$$M_3: U_{R1} - U_{Q1} + U_{R4} - U_{R5} - U_{R3} = 0$$

Personen:

Die zwei **kirchhoffschen Regeln** wurden 1845 von Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) formuliert. Er studierte zu dieser Zeit in Königsberg. Ab 1875 wirkte er als Professor an der Universität Berlin. Er arbeitete unter anderem mit Robert Wilhelm Bunsen (genau, der mit dem Bunsenbrenner) zusammen und entdeckte mit ihm das Caesium und das Rubidium.



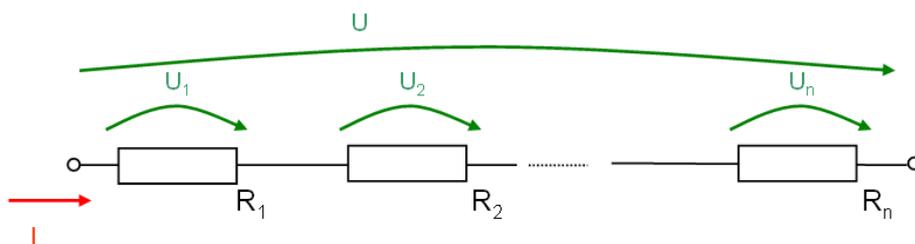
Bildquelle: wikipedia

2.1.6 Strom- und Spannungsteilerregel

Im Unterschied zu den (nahezu) universell geltenden Kirchhoffschen Sätzen ist die Anwendung von Strom- und Spannungsteilerregel an Voraussetzungen gebunden.

Die **Spannungsteilerregel** ist anwendbar, wenn die betrachteten Elemente, das können auch Gruppen von Schaltelementen sein, vom gleichen Strom durchflossen werden:

„Spannungen verhalten sich wie die Widerstände, über denen sie abfallen.“



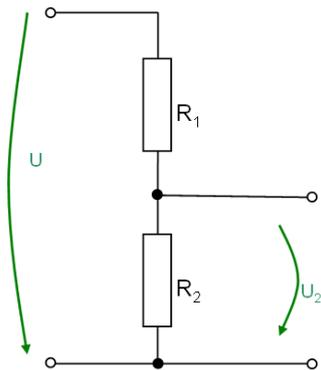
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \frac{U_\mu}{U_\nu} = \frac{R_\mu}{R_\nu} \qquad \frac{U_\mu}{U} = \frac{R_\mu}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}$$

U_μ, U_ν, R_μ bzw. R_ν sind dabei beliebige Spannungsabfälle bzw. die entsprechenden Widerstände oder Gruppen von Widerständen.

Spannungsteilerschaltungen werden Sie in der Elektrotechnik häufig antreffen, Sie sind die schaltungstechnische Umsetzung der Spannungsteilerregel.

Beispiel:

Die dargestellte Schaltung soll eine Eingangsspannung $U = 15V$ auf die Ausgangsspannung $U_2 = 3V$ herabmindern, dimensionieren Sie den Widerstand R_2 wenn $R_1 = 10k\Omega$ beträgt.



Beide Widerstände werden vom gleichen Strom durchflossen, folglich ist die Spannungsteilerregel anwendbar. Wir ermitteln zunächst über den Maschensatz U_1 .

$$U_1 = U - U_2 = \underline{12V}$$

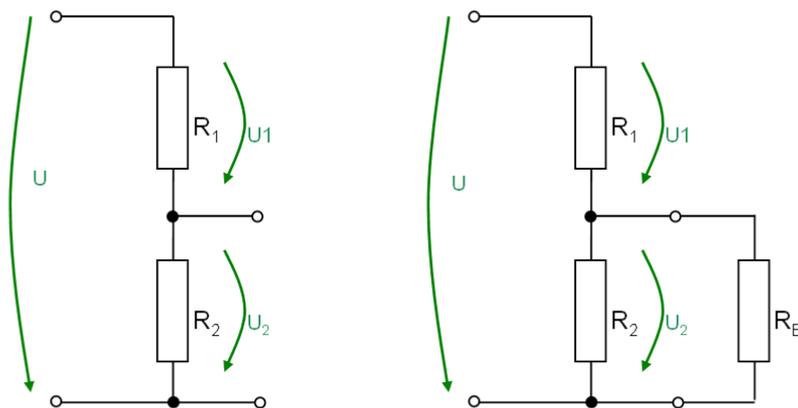
$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{U_2}{U_1} \quad R_2 = \frac{U_2 * R_1}{U_1} = \frac{3V * 10k\Omega}{12V} = \underline{\underline{2,5k\Omega}}$$

Man unterscheidet unbelastete (leer laufende) und belastete Spannungsteiler. Wegen der Voraussetzung der Stromgleichheit muss bei belasteten Spannungsteilern erst ein Ersatzwiderstand für die Parallelschaltung berechnet werden.

Beispiel:

Berechnen Sie für den unbelasteten und belasteten Spannungsteiler jeweils die Ausgangsspannung U_2 !

$$U = 12V \quad R_1 = 10k\Omega \quad R_2 = 2k\Omega \quad R_B = 15k\Omega$$



1. leer laufender Spannungsteiler (R_B nicht angeschlossen):

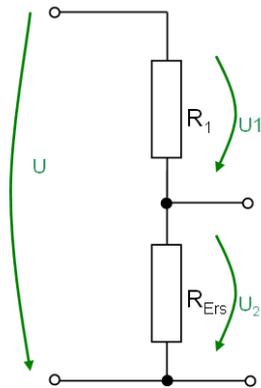
$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad U_2 = \frac{R_2 * U}{R_1 + R_2} = \frac{2k\Omega * 12V}{10k\Omega + 2k\Omega} = \underline{\underline{2V}}$$

2. belasteter Spannungsteiler, zunächst wird Ersatzwiderstand R_{Ers} berechnet.

$$R_{Ers} = \frac{R_2 * R_B}{R_2 + R_B} = 1,76k\Omega$$

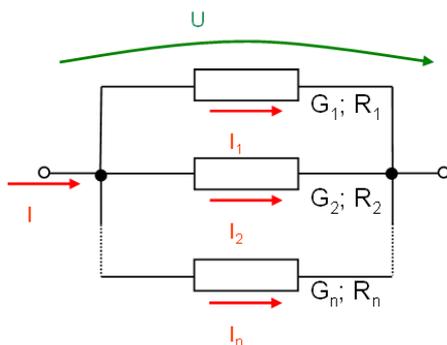
Im nächsten Schritt wenden wir die Spannungsteilerregel an:

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_{Ers}}{R_1 + R_{Ers}} \quad U_2 = \frac{R_{Ers} * U}{R_1 + R_{Ers}} = \frac{1,76k\Omega * 12V}{10k\Omega + 1,76k\Omega} = \underline{\underline{1,8V}}$$



Die **Stromteilerregel** ist anwendbar, wenn die betrachteten Elemente, auch hier können das Gruppen von Schaltelementen sein, an der gleichen Spannung liegen:

„Ströme verhalten sich wie die zugehörigen Leitwerte, die sie durchfließen“ oder
 „Ströme verhalten sich umgekehrt proportional zu den durchflossenen Widerständen.“



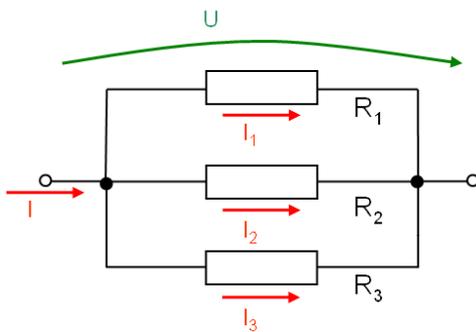
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2} \qquad \frac{I_\mu}{I_\nu} = \frac{G_\mu}{G_\nu} \qquad \frac{I_\mu}{I} = \frac{G_\mu}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}$$

Auch hier stehen I_μ bzw. I_ν für Ströme durch die entsprechenden Leitwerte. Wegen der Proportionalität der Ströme zu den Leitwerten ist es einfacher, mit den vielleicht etwas ungewohnten Leitwerten statt mit Widerständen zu rechnen. Die Umrechnung in Widerstandswerte ist abschließend über $R = 1/G$ leicht möglich.

Beispiel:

Berechnen Sie für $I = 1A$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 50\Omega$ die Teilströme!

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{20\Omega} = \underline{50mS} \quad G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{40\Omega} = \underline{25mS} \quad G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{50\Omega} = \underline{20mS}$$



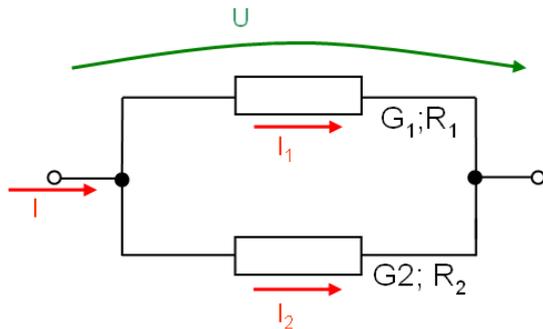
$$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \quad I_1 = \frac{G_1 * I}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{50mS * 1A}{50mS + 25mS + 20mS} = \underline{0,526A}$$

$$\frac{I_2}{I} = \frac{G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \quad I_2 = \frac{G_2 * I}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{25mS * 1A}{50mS + 25mS + 20mS} = \underline{0,263A}$$

$$\frac{I_3}{I} = \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \quad I_3 = \frac{G_3 * I}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{20mS * 1A}{50mS + 25mS + 20mS} = \underline{0,211A}$$

Sonderfall: Anwendung der Stromteilerregel an 2 parallelen Widerständen

Bei nur zwei Widerständen lässt sich die Stromteilerregel auch einfach auf die Widerstandswerte anwenden. Sollten im Netzwerk noch mehr Widerstände vorhanden sein, werden entweder Ersatzwiderstände ermittelt oder der nicht betroffene Teil der Schaltung außer Acht gelassen:



$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

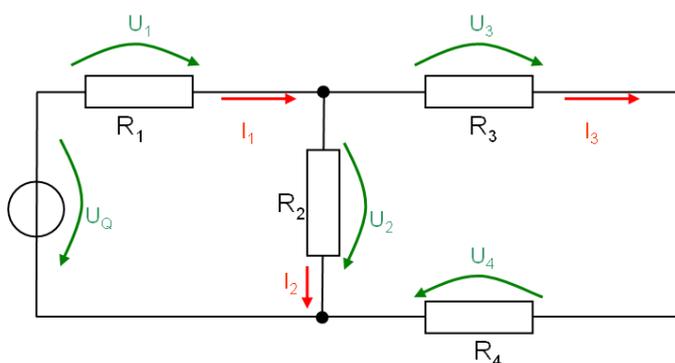
$$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{I_2}{I} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

2.2 Übungsaufgaben

2.2.1 Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ströme und Spannungen in dem vorgegebenen Netzwerk!



$$U_Q = 230V \quad R_1 = 1k\Omega \quad R_2 = 500\Omega \quad R_3 = 400\Omega \quad R_4 = 200\Omega$$

Lösungsweg:

Da R_3 und R_4 in Reihe liegen, berechnen wir zunächst den Ersatzwiderstand:

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 400\Omega + 200\Omega = \underline{600\Omega}$$

Den Ersatzwiderstand R_{234} bildet die Parallelschaltung aus R_2 und R_{34}

$$R_{234} = \frac{R_2 * R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{500\Omega * 600\Omega}{500\Omega + 600\Omega} = \underline{273\Omega}$$

Aus der Reihenschaltung von R_{234} und R_1 ermitteln wir schließlich den Gesamtwiderstand R_{1234} :

$$R_{1234} = R_1 + R_{234} = 1000\Omega + 273\Omega = \underline{1,273k\Omega}$$

Der Gesamtstrom I entspricht gleichzeitig I_1 durch den Widerstand R_1 , wir ermitteln ihn über den Quotienten aus Quellenspannung und Gesamtwiderstand:

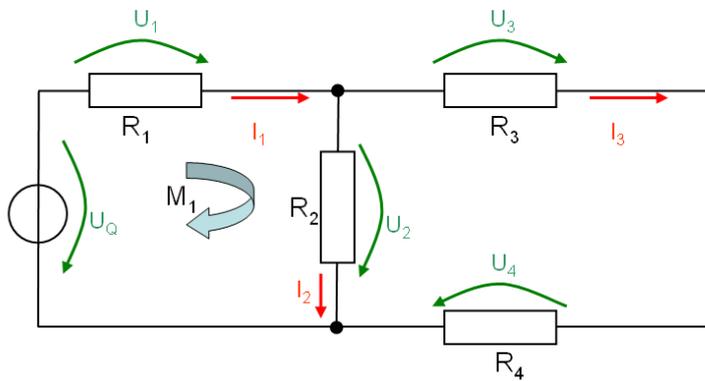
$$I_1 = I = \frac{U_Q}{R_{1234}} = \frac{230V}{1,273k\Omega} = \underline{181mA}$$

Für die Spannung U_1 folgt:

$$U_1 = I_1 * R_1 = 181mA * 1k\Omega = \underline{181V}$$

Zur Bestimmung der Spannung U_2 wenden wir den Maschensatz (Masche M_1) an:

$$U_1 + U_2 - U_Q = 0 \quad U_2 = U_Q - U_1 = 230V - 181V = \underline{49V}$$



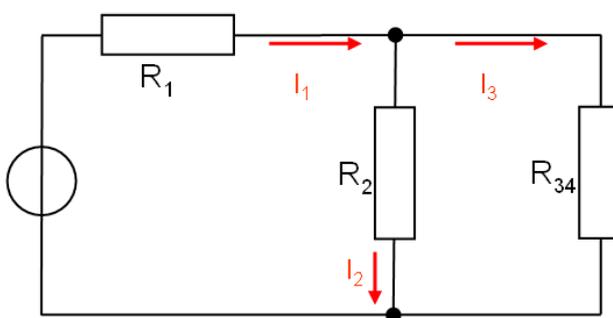
Der Gesamtstrom I_1 teilt sich in die beiden Teilströme I_2 und I_3 auf, für die Ermittlung von I_2 nutzen wir die Stromteilerregel:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_{34}}{R_2 + R_{34}} \quad I_2 = \frac{R_{34} * I_1}{R_2 + R_{34}} = \frac{600\Omega * 181mA}{500\Omega + 600\Omega} = \underline{\underline{98,72mA}}$$

I_3 berechnen wir einfach über den Knotenpunktsatz:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 181mA - 98,72mA = \underline{\underline{82,28mA}}$$



Schließlich fehlen noch U_3 und U_4 , diese berechnen wir mit I_3 über das ohmsche Gesetz:

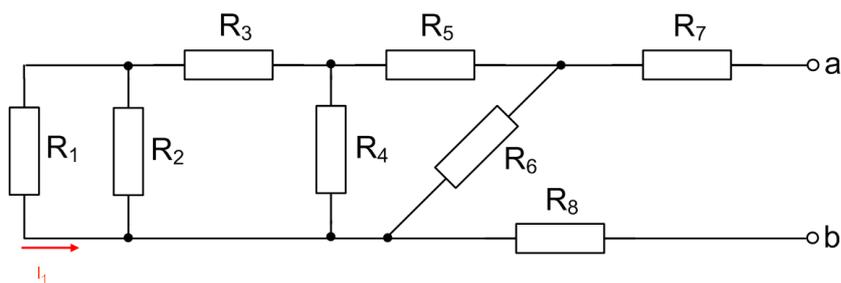
$$U_3 = I_3 * R_3 = 82,28mA * 400\Omega = \underline{32,9V}$$

$$U_4 = I_3 * R_4 = 82,28mA * 200\Omega = \underline{16,45V}$$

2.2.2 Aufgabe 2 (Endrunde 1997)

Bestimmen Sie den Ersatzwiderstand R_{ab} , alle Ströme I_{1-8} und Spannungen U_{1-8} über den entsprechenden Widerständen sowie I_{ab} und U_{ab} !

$$I_1 = 2A \quad R_{1-8} = 3\Omega$$



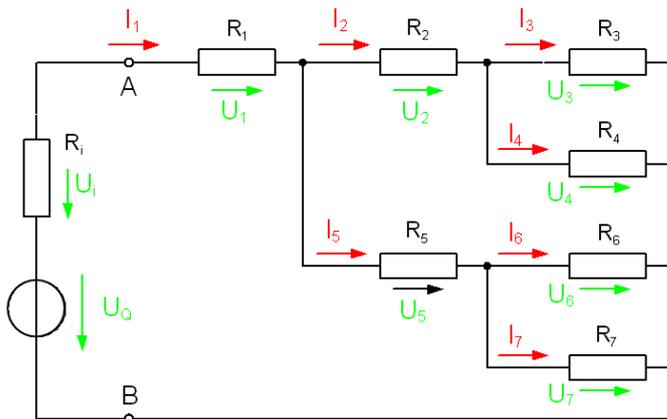
2.2.3 Aufgabe 3 (Endrunde 2010)

Given is the electrical circuit according to the figure

$$R_1 = 0,9\Omega \quad R_2 = 5\Omega \quad R_3 = R_4 = 2\Omega \quad R_5 = 1\Omega \quad R_6 = R_7 = 10\Omega$$

$$U_Q = 20V \quad R_i = 0,1\Omega$$

Calculate the amounts of all currents from I_1 to I_7 and all voltages from U_1 to U_7 and U_i !



2.3 Experimentelle Untersuchungen

2.3.1 Widerstandsnetzwerk I

Wir verwenden die gleiche Schaltungsstruktur wie in 1.2.1, passen aus Sicherheitsgründen aber die Spannungswerte an:

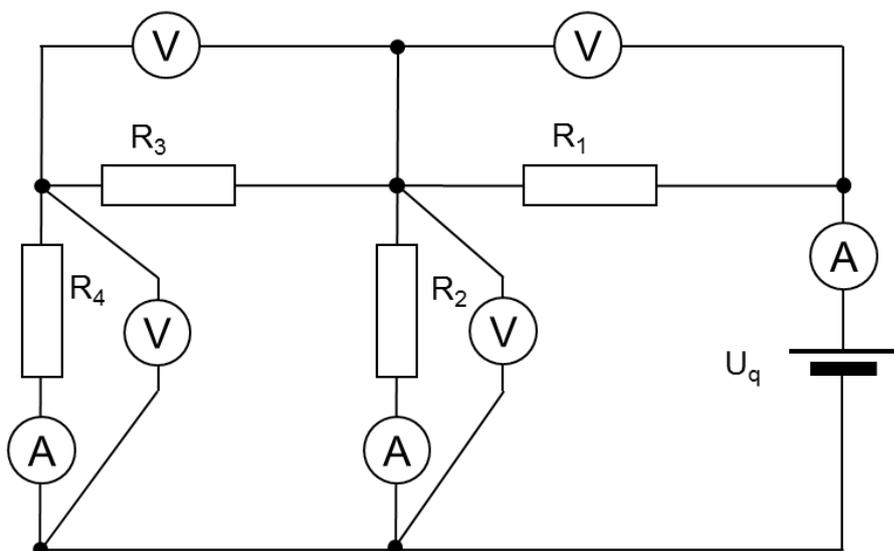


Abbildung 4: Schaltbild Widerstandsnetzwerk

$$U_q = 12V \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 5\Omega \quad R_3 = 4\Omega \quad R_4 = 2\Omega$$

1. Berechnen Sie alle Strom- und Spannungswerte und tragen Sie diese in die unten stehende Tabelle ein!
2. Messen Sie die Werte (eintragen)!
3. Vergleichen Sie gemessene und berechnete Werte, errechnen Sie die Abweichungen in %
4. Beurteilen Sie die Abweichungen, wodurch könnten sie hervorgerufen werden?

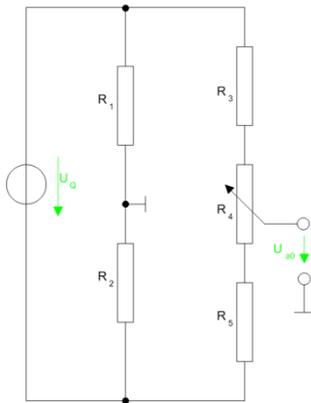
Spannung	Berechnete Werte U in V	Gemessene Werte U in V	Abweichung In %	Ströme	Berechnete Werte in A	Gemessene Werte in A	Abweichung In %
$U_1 =$				$I = I_1 =$			
$U_2 =$				$I_2 =$			
$U_3 =$				$I_3 = I_4 =$			

Begründung für mögliche Abweichungen:

2.3.2 Widerstandsnetzwerk II

Die Schaltung zeigt einen Spannungsteiler, dessen Ausgangsspannung sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann.

Ermitteln Sie experimentell den Wertebereich, in dem die Spannung U_{a0} einstellbar ist!



$$U_Q = 12V$$

$$R_1 = R_2 = 100\Omega$$

$$R_4 = 10k\Omega \text{ (Widerstandsdekade)}$$

$$R_3 = R_5 = 1k\Omega$$

2.4 Ergänzung: Widerstandsfiguren

2.4.1 Der „Widerstandswürfel“

Die Berechnung räumlicher Widerstandsnetzwerke gehört zu beliebten Aufgabenstellungen im „Denksport“. Man schult hier das räumliche Vorstellungsvermögen und wendet Symmetrien für eine Schaltungsvereinfachung an.

Das Bild zeigt ein aus zwölf Widerständen, wir setzen für jeden Widerstand einen Wert von $R_{1...12} = 1\Omega$ an. Wie groß ist der Ersatzwiderstand zwischen den beiden Punkten A und B?

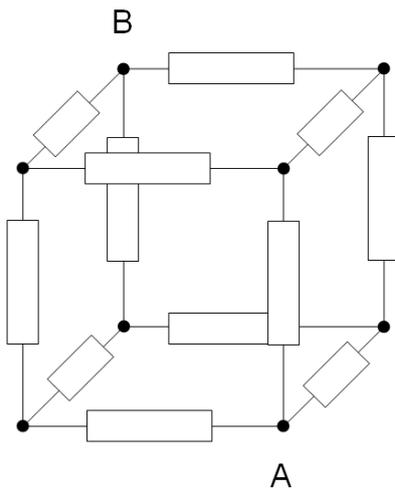


Abbildung 5: "Widerstandswürfel"

Die Lösung des Problems ist schwierig, wenn man Knotenpunkt- und Maschensatz direkt anwendet. Ein kleiner „Kunstgriff“ macht die Sache aber verblüffend einfach.

Zunächst führen wir die Hilfspunkte (Ecken) X_1 bis Y_3 ein, danach verzerren wir die Figur durch „Zusammendrücken“ und „Entwirren“, und ziehen den Punkt B zu einem Kreis auseinander:

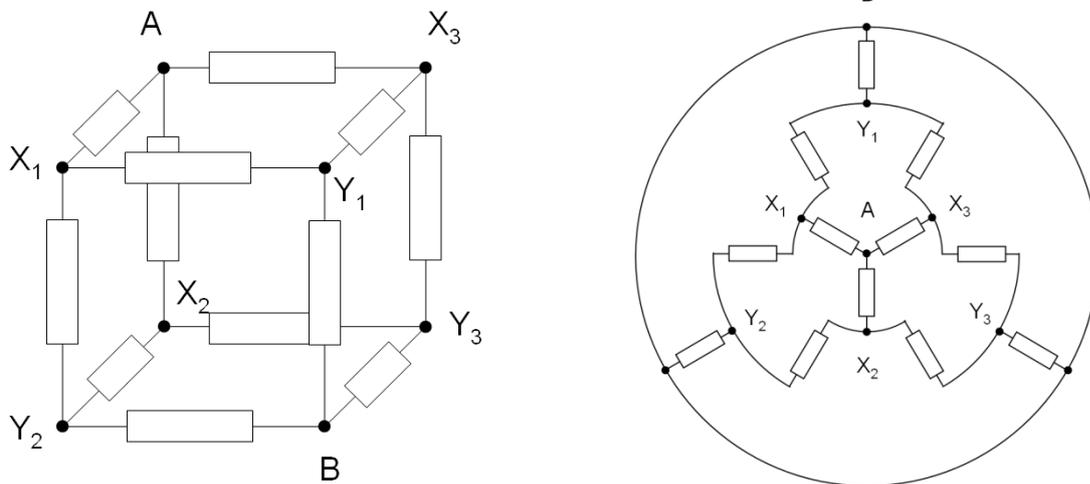


Abbildung 6: "Widerstandswürfel" mit Hilfspunkten und Verzerrung

Dreht man die Figur jetzt um 120° oder 240° , so verändert sie sich nicht. Die Würfleckenecken X_1 , X_2 und X_3 liegen aus Symmetriegründen auf dem gleichen Potential. Man kann sie also verbinden, ohne dass sich der Widerstand des Systems ändert. Gleiches gilt für die Ecken Y_1 , Y_2 und Y_3 .

Anschließend zeichnen wir den Widerstandswürfel in die uns bekannte Schaltungsdarstellung um:

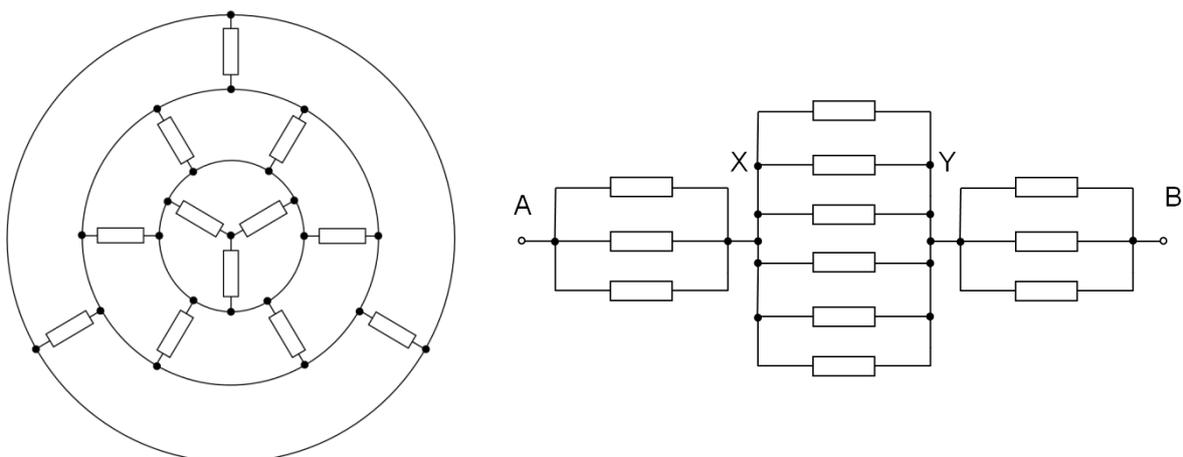


Abbildung 7: Auflösung für den "Widerstandswürfel"

Da alle Widerstände laut Aufgabenstellung den gleichen Wert haben, wird die Berechnung des Widerstandsnetzwerkes einfach:

$$R_{AX} = \frac{R}{3} = \frac{1\Omega}{3} = \underline{0,333\Omega} = R_{YB} \quad R_{XY} = \frac{R}{6} = \frac{1\Omega}{6} = \underline{0,166\Omega}$$

$$R_{AB} = R_{AX} + R_{XY} + R_{YB} = \frac{1}{3}\Omega + \frac{1}{6}\Omega + \frac{1}{3}\Omega = \underline{\underline{0,833\Omega}}$$

Im Labor haben Sie die Möglichkeit einen ähnlichen, mit Lampen realisierten, Widerstandswürfel und andere geometrische Figuren praktisch zu untersuchen.

3 Grundstromkreis

3.1 Grundlagenwissen

3.1.1 Modellierung des elektrischen Stromkreises: aktiver und passiver Zweipol

Um die Verhältnisse im elektrischen Stromkreis rechnerisch modellieren (nachbilden) zu können, bietet sich ein recht einfaches Modell an: die Aufteilung in so genannte aktive und passive Zweipole. Unter einem Zweipol wollen wir eine „Black-Box“ verstehen, an dieser sind für uns nur zwei Klemmen (Pole) interessant, an denen wir Strom und Spannung unter den verschiedenen Bedingungen betrachten wollen (Abbildung 8). Man unterscheidet in aktive und passive Zweipole. Ein **aktiver Zweipol** ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

- Der aktive Zweipol gibt elektrische Energie ab (er ist also eine elektrische Energiequelle)
- Die U/I-Kennlinie geht nicht durch den Nullpunkt: wenn $I=0$, dann ist $U \neq 0$ und umgekehrt; die U/I-Kennlinie hat einen negativen Anstieg
- Die beiden Schnittpunkte mit der Strom- bzw. Spannungsachse bezeichnen wir als Leerlaufspannung U_l ($I=0$) bzw. Kurzschlussstrom I_k ($U=0$).

Der **passive Zweipol** zeichnet sich hingegen durch folgende Eigenschaften aus:

- Er nimmt elektrische Energie auf (und gibt eine beliebige Energieform ab), er ist ein Verbraucher elektrischer Energie
- Seine U/I-Kennlinie verläuft durch den Nullpunkt, für $U=0$ gilt auch $I=0$. Die Kennlinie hat einen positiven Anstieg.

Durch Zusammenschaltung von Quelle und Verbraucher stellt sich der Arbeitspunkt ein (Schnittpunkt der beiden Kennlinien), er ist durch die Arbeitspunktgrößen U und I gekennzeichnet.

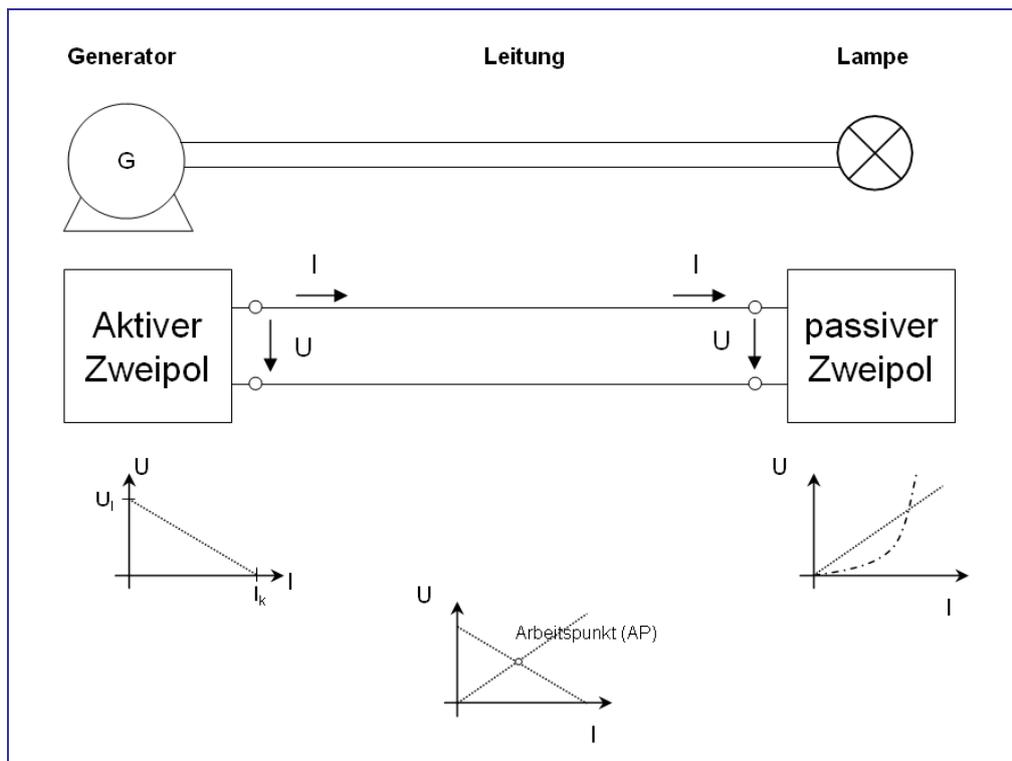


Abbildung 8: Modellierung mit dem Grundstromkreis

Für unser einfaches Modell wollen wir zunächst annehmen, dass sowohl die Kennlinien des aktiven, als auch die des passiven Zweipols linear verlaufen, sich mathematisch also als Geradengleichungen beschreiben lassen:

$$y = mx + n$$

Wenn wir jetzt für y die Spannung U , x den Strom I und für den Anstieg der Kurve $m = \Delta y / \Delta x$ den Widerstand R_a für den passiven Zweipol bzw. R_i für den aktiven Zweipol einsetzen, erhalten wir die sicher schon bekannten Gleichungen für den elektrischen Stromkreis:

Passiver Zweipol:
$$U = I * R_a \rightarrow R_a = \frac{U}{I}$$

Aktiver Zweipol:
$$U = U_1 - I * R_i \text{ (negativer Anstieg der Kennlinie)}$$

Für den Arbeitspunkt:
$$I * R_a = U_1 - I * R_i = U$$

Nach Spannungsteilerregel gilt:
$$U = \frac{U_l * R_a}{R_a + R_i}$$

Die Spannung U_l (Leerlaufspannung) stellen wir in der Schaltung durch ein Spannungsquellensymbol dar, R_a und R_i durch Widerstandssymbole. Diese stehen in der realen Schaltung oft für Netzwerke, der Innenwiderstand z.B. resultiert aus den Widerständen der Zuleitung und dem inneren Widerstand des Generators.

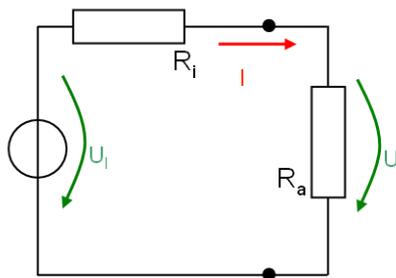


Abbildung 9: Grundstromkreis mit Spannungsquellen-Ersatzschaltbild

Beispiel:

Eine Kfz-Starterbatterie 12V/55Ah besitzt eine Leerlaufspannung von $U_l = 12,72V$ und hat einen Kälteprüfstrom von 480A. Hierbei darf die Spannung der Batterie für 30s nicht unter 7,2V absinken. Wie groß sind der Innenwiderstand und der Kurzschlussstrom der Batterie

$$U = U_l - I * R_i \quad R_i = \frac{U_l - U}{I} = \frac{12,72V - 7,2V}{480A} = \underline{0,0115\Omega = 11,5m\Omega}$$

$$I_k = \frac{U_l}{R_i} = \frac{12,72V}{11,5m\Omega} = \underline{1106A = 1,106kA}$$

In der Praxis liegt der Kurzschlussstrom einer solchen Starterbatterie deutlich höher!

3.1.2 Normierung und Lastfälle

Für die Darstellung von Strom und Spannung in Abhängigkeit vom Lastwiderstand ist es zweckmäßig, normierte Größen zu verwenden. Normierte Gleichungen bieten in der Elektrotechnik folgende Vorteile:

- Die grafische Darstellung ergibt einen allgemein gültigen Verlauf unabhängig von den Einzelheiten der aktuellen Größen
- Die Achseinteilung ist dimensionslos

Wir beziehen die Variable für Strom und Spannung auf die festen Größen des aktiven Zweipols Kurzschlussstrom und Leerlaufspannung sowie den Lastwiderstand auf den Innenwiderstand der Quelle:

$$\frac{U}{U_l} \quad \frac{I}{I_k} \quad \frac{R_a}{R_i}$$

Es ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\frac{U}{U_l} = \frac{I * R_a}{I * (R_a + R_i)} = \frac{R_a}{R_a + R_i} = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\frac{R_a}{R_i} + 1}$$

$$\frac{I}{I_k} = \frac{U_l * R_i}{U_l * (R_a + R_i)} = \frac{R_i}{(R_a + R_i)} = \frac{1}{\frac{R_a}{R_i} + 1}$$

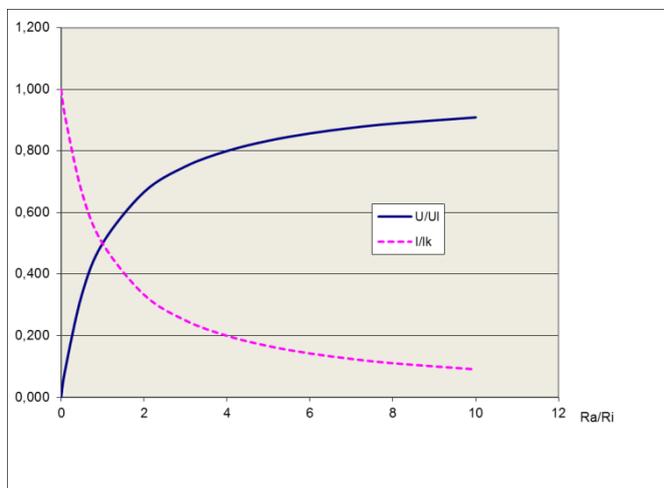


Abbildung 10: Normierung

Das Diagramm zeigt, dass mit sinkender Belastung (größer werdendes Verhältnis $\frac{R_a}{R_i}$) der

Strom abnimmt und die Spannung sich hingegen dem Wert der Leerlaufspannung asymptotisch annähert.

Ra/Ri	U/UI	I/Ik
0	0,000	1,000
0,1	0,091	0,909
0,5	0,333	0,667
1	0,500	0,500
2	0,667	0,333
5	0,833	0,167
8	0,889	0,111
10	0,909	0,091
∞	1,000	0,000

In Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{R_a}{R_i}$ lassen sich beim Grundstromkreis drei Betriebsfälle unterscheiden:

1. **Anpassung** → das Widerstandsverhältnis $\frac{R_a}{R_i} = 1$ liegt am Schnittpunkt der beiden

$$\text{Funktionsverläufe: } U = \frac{U_l}{2}, I = \frac{I_k}{2}$$

2. **Kurzschluss** → es fließt der maximal mögliche Strom, über R_a fällt keine Spannung

$$\text{ab: } \frac{R_a}{R_i} = 0; U = 0; I = I_k$$

3. **Leerlauf** → die maximal mögliche Spannung fällt über dem Lastwiderstand ab, es

$$\text{fließt kein Strom: } \frac{R_a}{R_i} \rightarrow \infty; U = U_l; I = 0$$

In der Praxis gibt man für den Leerlauf einen Bereich bis $\frac{R_a}{R_i} \geq 10$ und für den Kurzschluss

bis $\frac{R_a}{R_i} \leq 0,1$ an.

Beispiel:

Der Innenwiderstand eines Generators beträgt $R_i = 2\Omega$, seine Leerlaufspannung $U_l = 100V$.

An den Generator ist eine Last mit $R_a = 50\Omega$ angeschlossen. Berechnen Sie Strom und Spannung!

$$I_k = \frac{U_l}{R_i} = \frac{100V}{2\Omega} = 50A \quad \frac{R_a}{R_i} = \frac{50\Omega}{2\Omega} = 25$$

$$\frac{U}{U_l} = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\frac{R_a}{R_i} + 1} \quad U = U_l * \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\frac{R_a}{R_i} + 1} = 100V * \frac{25}{25+1} = \underline{96,15V}$$

$$\frac{I}{I_k} = \frac{1}{\frac{R_a}{R_i} + 1} \quad I = I_k * \frac{1}{\frac{R_a}{R_i} + 1} = 50A * \frac{1}{25+1} = \underline{1,92A}$$

3.1.3 Leistung und Wirkungsgrad

Die Verlustleistung P_v wird über dem Innenwiderstand umgesetzt:

$$P_v = (U_l - U) * I$$

Nach der Definition des Wirkungsgrades gilt folglich:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{P}{P + P_v} = \frac{U * I}{(U * I) + ((U_l - U) * I)} = \frac{U}{U_l}$$

Für die Berechnung der Leistung verwenden wir die Formeln in normierter Form:

$$U = U_l * \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\frac{R_a}{R_i} + 1} \quad I = I_k * \frac{1}{\frac{R_a}{R_i} + 1} = \frac{U_l}{R_i} * \frac{1}{\frac{R_a}{R_i} + 1}$$

$$P = U * I = \frac{U_l^2}{R_i} * \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\left(\frac{R_a}{R_i} + 1\right)^2}$$

Die Funktion für die Leistung P muss einen Extremwert haben, den wir in der üblichen mathematischen Weise bestimmen können (Bildung der ersten Ableitung, Null setzen). Um

Schreibarbeit zu sparen, führen wir eine Zwischenvariable $x = \frac{R_a}{R_i}$ ein:

$$P = U * I = \frac{U_l^2}{R_i} * \frac{x}{(x+1)^2}$$

Mit $y = \frac{P * R_i}{U_l^2}$ ergibt sich jetzt:

$$y = \frac{x}{(x+1)^2} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4}$$

Wir setzen $y = 0$ und erhalten den Extremwert x_E :

$$\frac{(x_E + 1)^2 - 2x_E(x_E + 1)}{(x_E + 1)^4} = 0 \quad \underline{\underline{x_E = 1}}$$

Das Maximum der abgegebenen Leistung stellt sich folglich bei $\frac{R_a}{R_i} = 1$ oder $R_a = R_i$ ein. Es

gilt:

$$P_{\max} = \frac{U_l * I_k}{4} = \frac{U_l^2}{4 * R_i}$$

Der Bezug der Leistung auf die Maximalleistung ergibt:

$$\frac{P}{P_{\max}} = \frac{4 \frac{R_a}{R_i}}{\left(\frac{R_a}{R_i} + 1\right)^2}$$

Die Grafik (Abbildung 11) verdeutlicht die Funktionsverläufe von $\frac{U}{U_l} = \eta$, $\frac{I}{I_k}$ und $\frac{P}{P_{\max}}$ in

Abhängigkeit von $\frac{R_a}{R_i}$, ergänzend zur Wertetabelle:

Ra/Ri	U/U _l =η	I/I _k	P/P _{max}
0	0,00	1,00	0,00
0,5	0,33	0,67	0,89
1	0,50	0,50	1,00
2	0,67	0,33	0,89
5	0,83	0,17	0,56
10	0,91	0,09	0,33
∞	1,00	0,00	0,00

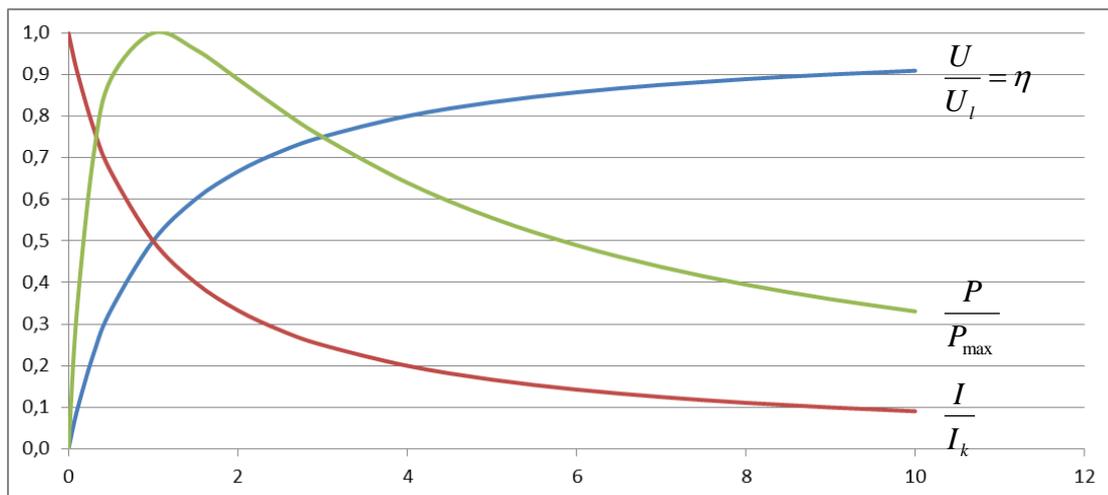


Abbildung 11: Leistung und Wirkungsgrad im Grundstromkreis

Beispiel:

Ein Verstärker gibt an eine Lautsprecherbox mit einem Widerstand von $R_a = 4\Omega$ seine maximale Leistung von $P_{\max} = 25W$ ab. Wie groß ist die abgebbare Leistung an eine Lautsprecherbox mit $R_a = 8\Omega$?

$$\frac{P}{P_{\max}} = \frac{4 \frac{R_a}{R_i}}{\left(\frac{R_a}{R_i} + 1\right)^2} \quad P = \frac{P_{\max} * 4 \frac{R_a}{R_i}}{\left(\frac{R_a}{R_i} + 1\right)^2} = \frac{25W * 4 * \frac{8\Omega}{4\Omega}}{\left(\frac{8\Omega}{4\Omega} + 1\right)^2} = 25W * \frac{8}{9} = \underline{\underline{22,22W}}$$

Die gleiche Leistung wird auch an eine Box mit $R_a = 2\Omega$ abgegeben, allerdings besteht hier wegen des höheren Stromes die Gefahr einer Schädigung des Verstärkers.

Beispiel 2:

Schließt man an eine Antennendose, z.B. für das Kabelfernsehen, ein zweites Gerät an, so verschlechtert sich oft die Empfangsqualität. Das Anschließen von mehreren Geräten an der 230V-Steckdose hat hingegen in der Regel keine Auswirkungen auf das einzelne Gerät. Begründen Sie diesen Effekt mithilfe des Grundstromkreises!

Antwort:

Bei der Übertragung des von der Antenne gelieferten Signals kommt es auf maximale Leistung an, man nimmt hierfür einen schlechten Wirkungsgrad in Kauf (Anpassung, $R_a = R_i$). Durch den Anschluss weiterer Geräte wird der Bereich der Anpassung verlassen, die abgegebene Leistung sinkt. Die 230V-Steckdose versorgt mit Energie, hier ist ein hoher Wirkungsgrad der Energieübertragung erforderlich. Der Leerlaufbereich wird auch beim Anschluss weiterer Geräte in der Praxis nicht verlassen ($R_a \gg R_i$), deshalb bemerkt man keine Auswirkungen⁵.

3.2 Übungsaufgaben

3.2.1 Aufgabe 1 (Endrunde 2001)

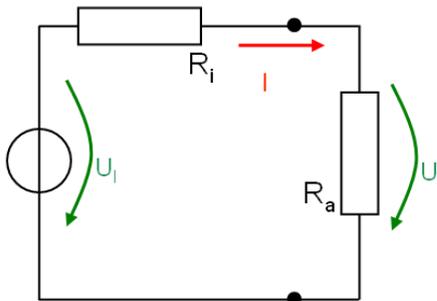
Zwei Messungen an einer Batterie ergaben:

AP1: Klemmenspannung $U_1 = 4,25V$ beim Belastungsstrom $I_1 = 0,1A$

AP2: Klemmenspannung $U_2 = 3,25V$ beim Belastungsstrom $I_1 = 0,5A$

- Berechnen Sie Innenwiderstand R_i und Leerlaufspannung U_l der Batterie!
- Bestimmen Sie die Klemmenspannung, bei der die Verbraucherleistung maximal wird!

⁵ Messtechnisch kann man aber einen Spannungsabfall nachweisen, die Bestimmungen der Energieversorger geben hier zulässige Werte vor.

Lösungsweg:

$$a) \quad R_i = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = -\frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1} = \underline{2,5\Omega}$$

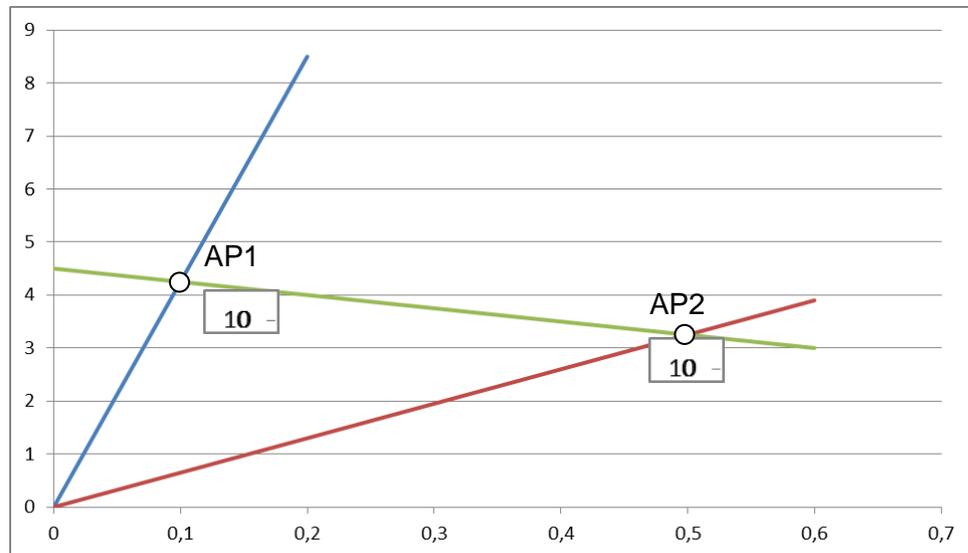
$U_1 = U + I * R_i$ (gewählt wird das erste Wertepaar):

$$U_1 = U + I_1 * R_i = 4,24V + 0,1A * 2,5\Omega = \underline{4,49V}$$

b) Die maximale Leistung wird bei $R_a = R_i$ abgegeben (Herleitung s.o.).

$$\frac{U}{U_1} = \frac{R_a}{R_a + R_i} \quad \frac{U}{U_1} = \frac{1}{2} \quad U = \frac{1}{2} U_1 = \underline{2,245V}$$

Grafische Darstellung:



3.2.2 Aufgabe 2 (Endrunde 1997)

- Berechnen Sie die maximale Leistung, die einer Taschenlampenbatterie ($U_l = 4,5V$; $R_i = 2,3\Omega$) entnommen werden kann!
- Bestimmen Sie den dazu notwendigen Belastungswiderstand!
- Berechnen Sie die Arbeitspunkte, bei denen der Batterie die Leistung $P = 1,5W$ entnommen wird!

3.2.3 Aufgabe 3 (Endrunde 2010)

Verbinden Sie vier gleiche Spannungsquellen ($U_l = 1,5V$ und $R_i = 1\Omega$) so, dass eine Klemmenspannung von 1. $U = 6V$, 2. $U = 3V$ und 3. $U = 1,5V$ entsteht.

- Zeichnen Sie die Schaltung für die drei Fälle und berechnen Sie für jeden R_i und I_k !
- Bestimmen Sie den Strom I für jede Quelle bei einem Lastwiderstand von $R_a = 2\Omega$!
- Bestimmen Sie für jede Quelle den Lastwiderstand R_a , an dem die maximale Leistung umgesetzt wird!

3.2.4 Aufgabe 4 (Endrunde 2009)

An accumulator with off-load voltage $U_l = 8V$ and internal resistance $R_i = 5\Omega$ is connected with a filament lamp. The current-voltage-characteristic of the filament lamp is given (in the chart).

U/V	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I/A	0	0,62	0,84	1,00	1,12	1,23	1,30	1,35	1,41	1,43

- Calculate current and voltage of the filament lamp in service!
- Calculate the electric power of the filament lamp!

3.3 Experimentelle Untersuchungen zum Grundstromkreis

3.3.1 Versuchsziel

Anwendung der Strom- und Spannungsbeziehungen im Grundstromkreis.

Festigung und Diskussion der Grundgedanken der Zweipoltheorie und der Leistungsfähigkeit dieser Methode bei der verallgemeinerten Behandlung elektrischer Netzwerke.

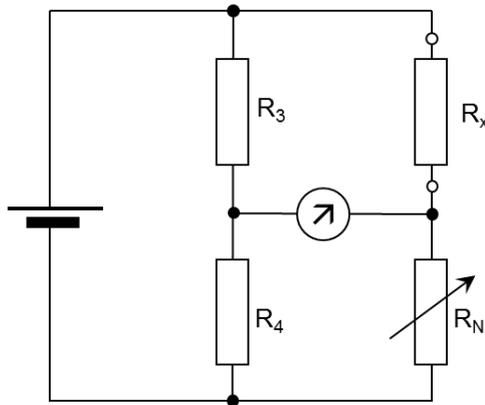
Kennenlernen der wichtigsten Gesichtspunkte bei der Auswahl und dem praktischen Umgang mit Messgeräten zur Strom- und Spannungsmessung.

Kritische Auswahl der zweckmäßigsten Schaltung bei der Bestimmung elektrischer Größen.

3.3.2 Versuchsvorbereitung

- Die Funktionen $\frac{U}{U_l}$; $\frac{I}{I_k}$ und $\frac{P}{P_{\max}}$ sind in Abhängigkeit von $\frac{R_a}{R_i}$ für den Grundstromkreis (Abbildung 1) rechnerisch zu ermitteln und grafisch darzustellen. Tragen Sie die Ergebnisse in die Wertetabelle (Anhang 2) ein.
- Stellen Sie die Ergebnisse der Aufgabe 1 im Diagrammvordruck (Anhang 3) grafisch dar!

3. Erläutern Sie die Wirkungsweise der Wheatstone'schen Brücke anhand der Skizze:



4. Studieren Sie die entsprechenden Abschnitte in der angegebenen Literatur zu dem Problemkreis: Zweipoltheorie!

3.3.3 Versuchsdurchführung

erforderliche Geräte:

- Experimentierplatte (Abbildung 12) ($U_q = 6V$)
- Widerstandsmessbrücke (Wheatstone) ($U_q = 4V$)
- 2 Universalmessgeräte
- $R_i = R_1 = 10\Omega$ (Resistanz 2)
- $R_a = R_2$ (Widerstandskaskaden 1-5)

Hinweis: Auf der Schablone sind die erforderlichen Verbindungen als graue und schwarze Linien dargestellt! Hierbei ist zu beachten, dass die grau gekennzeichneten Verbindungen bereits intern verschaltet sind und alle schwarzen Verbindungen sowie technischen Elemente (Einspeisungen, Bauelemente und Messgeräte etc.) extern zugeschaltet werden müssen.

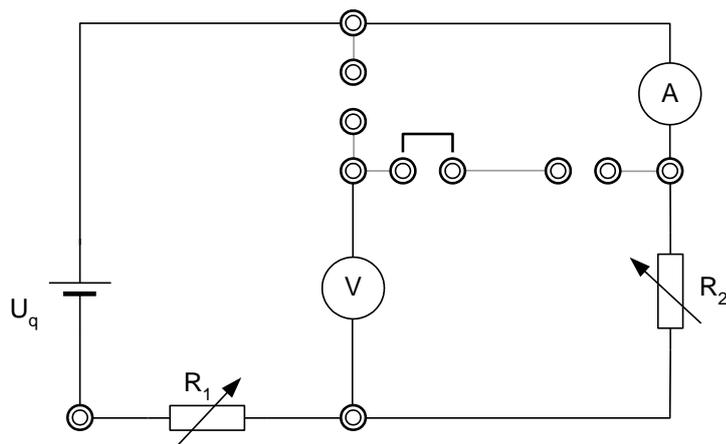


Abbildung 12: Versuchsaufbau „Grundstromkreis“

Bedienung der Stromversorgung:



Hinweis: - 1. Netzschalter einschalten
 - 2. Stromversorgung „DC“ zuschalten
 - 3. Spannung „DC“ einstellen
 Wird nur eine Wechselspannung benötigt, entfallen die Punkte 2 und 3!

Aufgabe 1:

Messung der Leerlaufspannung U_l bei folgenden Werten von R_1

- a) 0Ω
- b) 10Ω
- c) 100Ω

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Kurzschlussstrom für $R_1 = 10\Omega$ und die gemessene Leerlaufspannung U_l aus Aufgabe 1! Stellen Sie den Widerstandswert von $R_1 = 10\Omega$ ein und kontrollieren Sie mittels Messung mit der Wheatstone'schen Messbrücke! Messen Sie den Kurzschlussstrom I_k für $R_1 = 10\Omega$! Vergleichen Sie den gemessenen I_k mit dem berechneten Wert!

Aufgabe 3

Messung von Strom und Spannung in Abhängigkeit vom veränderlichen Widerstand

R_2 mit $R_1 = 10\Omega$:

Stufe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
R_2/Ω	0	0,1	0,2	0,5	1,0	2	5	10	15	20	50	100	250	500	1000	2500	∞

- Stromrichtig (s. Anhang 1)
- Spannungsrichtig (s. Anhang 1)

Beginnen Sie die Messung mit der kleinsten Stufe des Widerstands R_2 !

3.3.4 Auswertung

Tragen Sie die Ergebnisse in die Wertetabelle (Anhang 2) im Abschnitt 2 bzw. Abschnitt 3

ein und berechnen Sie die Funktionen $\frac{U}{U_l}$; $\frac{I}{I_k}$ und $\frac{P}{P_{\max}}$ in Abhängigkeit von $\frac{R_a}{R_i}$! Stellen Sie

die Funktionen $\frac{U}{U_l}$; $\frac{I}{I_k}$ und $\frac{P}{P_{\max}}$ in Abhängigkeit von $\frac{R_a}{R_i}$ auf dem als Anhang 3 beigefügten

Diagrammvordruck grafisch dar. Vergleichen Sie die Kurven der stromrichtigen und spannungsrichtigen Messung mit den unter 2.3.2. Aufgabe 1 ermittelten Verläufen. Diskutieren Sie, bei welchem Messverfahren der geringste Messfehler auftritt.

Ermitteln Sie die absoluten sowie die relativen Fehler der stromrichtigen und spannungsrichtigen Messung bezogen auf die berechneten Werte und stellen Sie diese in einer Tabelle dar!

Anhang 1

Spannungsrichtige Messung

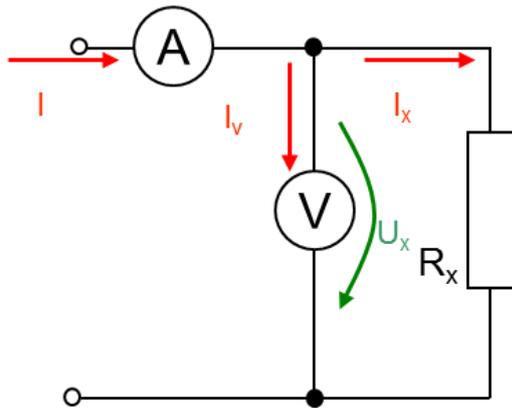


Abbildung 13: spannungsrichtige Messung

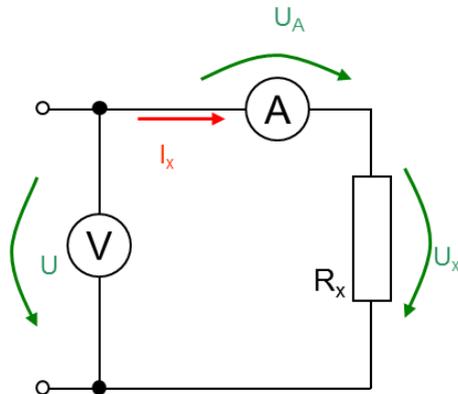
Mit dem Messwerten berechneter Wert: $R'_x = \frac{U_x}{I}$

Tatsächlicher Wert: $R_x = \frac{U_x}{I_x}$

Da der vom Amperemeter gemessene Gesamtstrom größer ist als der Strom durch den Widerstand, wird für den Widerstand R_x ein zu kleiner Wert ermittelt. Eine Messwertkorrektur ist per $I_x = I - I_v$ möglich:

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U_x}{I - I_v} = \frac{1}{\frac{I}{U_x} - \frac{I_v}{U_x}} \quad R_x = \frac{1}{\frac{1}{R'_x} - \frac{1}{R_{iV}}}$$

Diese Schaltung sollte angewendet werden, wenn der Innenwiderstand des Spannungsmessers R_{iV} , der die Verfälschung bedingt, sehr viel größer als der Widerstand des Messobjekts ist: $R_{iV} \gg R_x$

Stromrichtige Messung**Abbildung 14: stromrichtige Messung**

Mit dem Messwerten berechneter Wert: $R_x'' = \frac{U}{I_x}$

Tatsächlicher Wert: $R_x = \frac{U_x}{I_x}$

Da die Gesamtspannung größer ist als der Spannungsfall über R_x , wird für den Widerstand ein zu großer Wert ermittelt. Durch Einsetzen von $U_x = U - U_A$ kann analog zum oben beschriebenen Verfahren eine Messwertkorrektur vorgenommen werden:

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U - U_A}{I_x} = \frac{U}{I_x} - \frac{U_A}{I_x} \quad R_x = R_x'' - R_{iA}$$

Diese Messschaltung wird angewendet, wenn der Innenwiderstand des Strommessers viel kleiner als der Widerstand des Messobjekts ist.

$$R_{iA} \ll R_x$$

Die Problematik strom- bzw. spannungsrichtigen Messen ist dann zu entscheiden, wenn es auf eine zeitgleiche Messung von Strom und Spannung ankommt.

Anhang 2

1						2						3					
<i>ideal</i> $R_i = 10 \Omega$						<i>stromrichtig</i> $U_i = \quad V$						<i>spannungsrichtig</i> $I_k = \quad mA$					
Stufe	R_a / Ω	R_a / R_i	U / U_i	I / I_k	P / P_{max}	U / V	U / U_i	I / mA	I / I_k	P / mW	P / P_{max}	U / V	U / U_i	I / mA	I / I_k	P / mW	P / P_{max}
0	0	0															
1	0,1	0,01															
2	0,2	0,02															
3	0,5	0,05															
4	1	0,1															
5	2	0,2															
6	5	0,5															
7	10	1															
8	15	1,5															
9	20	2															
10	50	5															
11	100	10															
12	250	25															
13	500	50															
14	1000	100															
15	2500	250															
16	∞	∞															

Wertetabelle

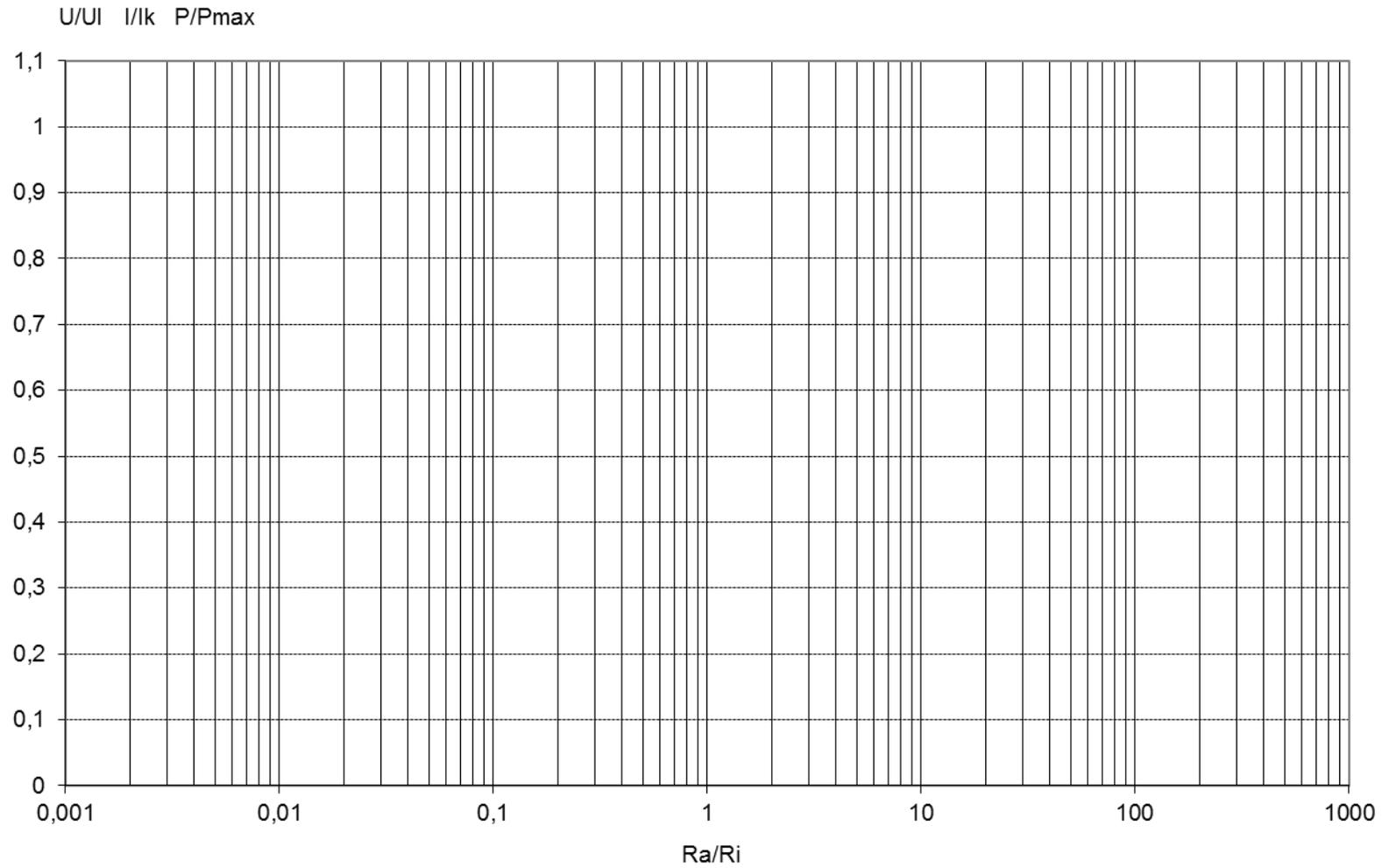
Dipl.-Ing. Cordula Paetzold

cpaetzold@hs-zigr.de

Hochschule Zittau/Görlitz

Stand 12/2010

Versuch 1.01 - Grundstromkreis



3.4 Ergänzung: Technische Ausführungen von Quellen

In den Quellen werden elektrische Ladungen unter Aufwendung von Energie getrennt. Als Begriff wird in der Praxis recht willkürlich „Stromquelle“, „Spannungsquelle“ oder „Energiequelle“ gewählt, was eigentlich nicht exakt ist.

Die Energie, die zur Ladungstrennung dient, kann unterschiedlicher Art sein:

- Chemische Energie (galvanische Elemente, „Batterien“)
- Mechanische Energie: Induktion oder Reibung (Generator)
- Lichtenergie (Photozelle)
- Wärmeenergie (Thermoelement)

3.4.1 Elektrochemische Spannungsquellen⁶

Vor allem bewegliche Geräte nutzen elektrochemische Spannungsquellen für die elektrische Energieversorgung. Wie der Name schon sagt, wird hier chemische Energie für die Ladungstrennung verwendet. Man unterscheidet bei den galvanischen Elementen Primär-, Sekundär- und Brennstoffzellen.

Primärelemente sind so genannte Redoxzellen. Sie liefern so lange Energie, bis der Vorrat an Oxidations- bzw. Reduktionsmittel erschöpft sind. Ein Beispiel ist die Zink-Kohle-Batterie, Während der Entladung wird der Zinkbecher der Zelle zersetzt:



Sekundärzellen (Akkumulatoren) können durch Elektrolysevorgänge, d.h. durch Umkehr der Entladungsreaktion, wieder aufgeladen werden. Beispiele sind hier der Bleiakkumulator im Kfz oder der Lithium-Ionen-Akku Ihres Mobiltelefons

Brennstoffzellen enthalten das Oxidations- und Reduktionsmittel nicht von vornherein. Hier werden die Reaktionspartner (z.B. Wasserstoff und Sauerstoff) kontinuierlich zugeführt.

⁶ Eine gute Quelle zum Weiterlesen ist z.B. www.heinrichonline.de/Skript07/Skript07-13.pdf

Personen:

Luigi Galvani (1737-1798) war eigentlich Professor der Medizin und Theologe. Den nach ihm benannten Galvanismus entdeckte er eher zufällig durch Experimente mit Froschschenkeln. Weniger bekannt ist, dass er auch die erste Antenne errichtete. Mit der brachte er einen angeschlossenen Froschschenkel bei Annäherung eines Gewitters zum Zucken⁷.

**3.4.2 Elektronische Gleichspannungsquellen**

Elektronische Gleichspannungsquellen erzeugen die benötigte Energie aus anderen Formen von Elektroenergie z.B. aus dem 230V-Versorgungsnetz. Sie sind damit an das speisende Netz gebunden haben aber den Vorteil, dass sie sich im Betrieb nicht „erschöpfen“.

Die Grafik (Abbildung 15) skizziert den prinzipiellen Aufbau einer elektronischen Spannungsquelle.

Die Spannung des Versorgungsnetzes wird zunächst angepasst. Im einfachsten Fall geschieht dies über einen Transformator. In den häufig anzutreffenden Schaltnetzteilen wird die Wechselspannung zuvor auf eine höhere Frequenz umgesetzt. Der nachgeschaltete Gleichrichter erzeugt eine Gleichspannung. Diese wird durch die elektronische Stabilisierung auf einem konstanten Wert gehalten. Je nach Ausführung der Regelschaltung kann man konstante Ausgangsspannungen ($R_i = 0$, Konstantspannungsquelle) oder konstante Ausgangsströme ($R_i \rightarrow \infty$, Konstantstromquelle) realisieren.

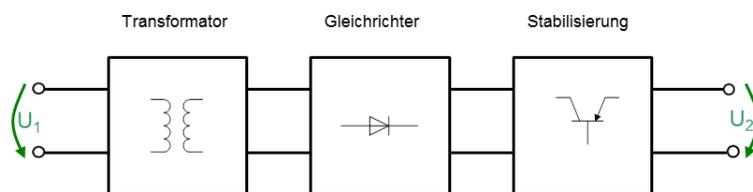


Abbildung 15: Blockschaltbild einer elektronischen Gleichspannungsquelle

⁷ Gefunden bei: http://www.leifiphysik.de/web_ph10/geschichte/03galvani/froesche.htm

4 Elektrisches Feld

4.1 Grundlagenwissen

4.1.1 Zum Feldbegriff

Als Feld bezeichnen wir einen energetischen Zustand des Raumes. Felder werden nach ihrer bestimmenden physikalischen Größe (Temperaturfeld, Kraftfeld) oder auch nach ihrer mathematischen Natur (skalare Felder, vektorielle Felder, statische Felder) unterschieden.

Die physikalische Größe, die den Raumzustand an einem Punkt beschreibt, bezeichnen wir als Feldgröße. Diese Feldgrößen können skalare (z.B. Temperaturfeld) oder auch vektorielle Größen (z.B. Elektrisches Feld, magnetisches Feld) sein. Durch die Verwendung des Feldbegriffs ist es möglich, die physikalischen Vorgänge im „Vielpunktesystem“ elegant zu beschreiben, allerdings kommen hier oft recht komplexe mathematische Verfahren zum Einsatz. Eine sehr anschauliche Beschreibung von Vektorfeldern ist mit Hilfe der Feldlinien möglich, hierbei gilt:

1. Die Tangente der Feldlinien stellt für jeden Punkt die Richtung der Feldgröße dar
2. die Feldstärke (also der Betrag) wird durch die Dichte der Feldlinien veranschaulicht, je geringer der Abstand der Feldlinien, umso größer der Betrag
3. da eine Größe in einem Punkt nur einen Zustand bezüglich Betrag und Richtung annehmen kann, können sich die Feldlinien nicht berühren oder schneiden

Man kann sich die Feldlinien als Wirkungen der Kräfte im Feld vorstellen. **Die Feldlinien sind bestrebt, sich einerseits zu verkürzen und andererseits sich möglichst weit voneinander zu entfernen**⁸. Verlaufen die Feldlinien in gleichem Abstand parallel, so spricht man von einem **homogenen Feld**. Der Feldvektor hat an jedem Punkt des Raumes gleichen Betrag und gleiche Richtung (Abbildung 16).

⁸ Quelle: Sexl, Raab, Streeruwitz: Der Weg zur modernen Physik, Bd. 2, S. 108

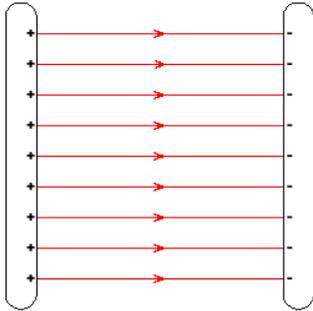


Abbildung 16: homogenes elektrisches Feld eines Plattenkondensators

Felder, die diese Bedingung nicht erfüllen, bezeichnet man als **inhomogene Felder** (Abbildung 17).

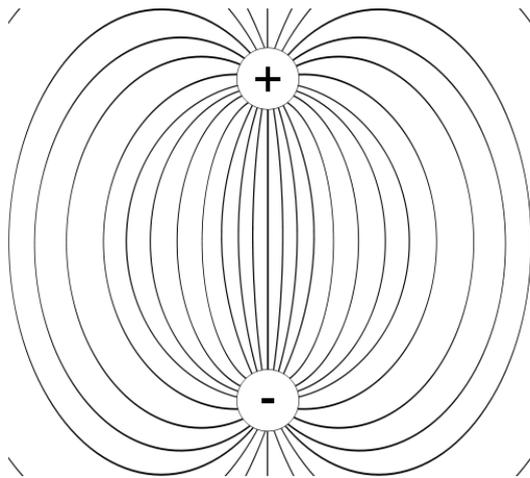


Abbildung 17: elektrisches Feld eines Dipols (Urheber: Cweiseke)

4.1.2 Feldgrößen des elektrischen Ladungsfeldes

Die Erscheinungen in der Elektrotechnik werden durch die elektromagnetischen Felder bestimmt, genau genommen handelt es sich hier um

- Das elektrische Strömungsfeld
- Das elektrische Ladungsfeld
- Das Magnetfeld

Der Zustand des Feldraumes lässt sich über die Feldstärke und die Flussdichte beschreiben, findet physikalisch keine Strömung statt, werden diese Begriffe aus Gründen der Anschaulichkeit dennoch verwendet⁹. Im Folgenden wollen wir uns mit dem elektrischen Ladungsfeld im nicht leitfähigen Raum befassen. Da die ruhenden Ladungen betrachtet werden, finden keine zeitlichen Änderungen statt. Die Betrachtung des Magnetfeldes erfolgt im nächsten Kapitel.

Der elektrischen Feldtheorie liegt die Vorstellung zugrunde, dass jede elektrische Ladung den Raum in ihrer Umgebung verändert, indem sie ein „elektrisches Feld“ um sich herum aufbaut. Worin die Veränderung des Raumes dabei besteht, ist noch immer ein Geheimnis. Wir können lediglich sagen:

Ein elektrisches Feld ist ein Raum, in dem eine elektrische Ladung eine Kraft erfährt.

Das Feld wird beschrieben durch den Vektor \vec{E} der elektrischen Feldstärke.

Die elektrische Feldstärke \vec{E} in einem Punkt des Raumes ist der Quotient aus der Kraft \vec{F} , die eine „Probeladung“ q in diesem Punkt erfährt und dieser Ladung¹⁰:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

⁹ S. Herzig [3], S. 141

¹⁰ S.a. Einführung in die Theoretische Physik, Band 8 <http://de.wikibooks.org/wiki/Elektrostatik>

Für die Einheiten von Feldstärke und **Verschiebungsflussdichte** gilt:

$$\text{Elektrische Feldstärke: } \vec{E} \quad [E] = 1 \text{ V/m}$$

$$\text{Verschiebungsflussdichte: } \vec{D} \quad [D] = 1 \text{ As/m}^2$$

Elektrische Feldstärke und Flussdichte hängen über eine Materialkonstante zusammen, die so genannte Permittivität (lat.: permittere = erlauben, überlassen, durchlassen):

$$\varepsilon = \frac{\vec{D}}{\vec{E}} \quad [\varepsilon] = 1 \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

Die Permittivität ε setzt sich aus der elektrischen Feldkonstante ε_0 (Influenzkonstante, eine Naturkonstante) und der relativen Permittivität ε_r (früher Dielektrizitätskonstante), einer Vergleichszahl für unterschiedliche Materialien, zusammen:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 * \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_0 = 8,854 * 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

Material	ε_r
Vakuum (Luft)	1
Papier	1,8 ... 2,6
Transformatoröl	2,2 ... 2,5
Porzellan	4,5 ... 6,5
Bariumtitanat	1500 ... 2200

Durch Integration lassen sich aus den vektoriellen Feldgrößen skalare Feldgrößen (integrale Feldgrößen) ableiten:

Für den Verschiebungsfluss Ψ gilt:

$$\Psi = \int_A \vec{D} * d\vec{A}$$

Die Spannung U ergibt sich aus:

$$U = \int_s \vec{E} * d\vec{s} \quad U_{AB} = \int_A^B \vec{E} * d\vec{s}$$

Umgekehrt gilt:

$$\vec{E} = \frac{dU}{ds}$$

Das elektrostatische Feld wird durch ruhende elektrische Ladungen hervorgerufen:

$$Q = \oint \vec{D} * d\vec{A} = \Psi$$

Der Ring im Integralzeichen bedeutet, dass sich die Integration über eine geschlossene Linie erstreckt.

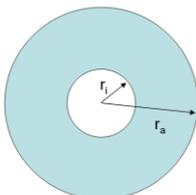
Die letzte Gleichung wird auch als 3. Maxwellsche Gleichung bezeichnet.

Personen:

James Clerk Maxwell (1831-1879) war ein schottischer Physiker. Er entwickelte u.a. einen Satz von Gleichungen, welche die Grundlage der Elektrizitätslehre und des Magnetismus bilden. Albert Einstein bezeichnete das Werk Maxwells als „das Tiefste und Fruchtbare, das die Physik seit Newton entdeckt hat“. Die Maxwellschen Gleichungen wurden erstmals 1864 veröffentlicht



Beispiel:



Ein zylindrisches Hochspannungskabel hat einen Radius des Außenleiters von $r_a = 10\text{cm}$. Berechnen Sie den Radius des Innenleiters r_i , bei dem die Feldstärke an dessen Oberfläche minimal wird!

$$\varepsilon = \frac{\vec{D}}{\vec{E}} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$$

$$\Psi = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \qquad \vec{D} = d\Psi / dA$$

Für die Zylinderoberfläche des Kabels gilt: $A = 2 \times \pi \times r \times l$ (l = Länge des Kabels)

Durch Einsetzen der Gleichungen ineinander erhalten wir:

$$\vec{E} = d\Psi / dA \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

Wir können von einem einheitlichen Dielektrikum und von symmetrischer Geometrie ausgehen, deshalb ist die Verschiebungsdichte auf der Mantelfläche des Zylinders überall konstant:

$$\vec{E} = \frac{\Psi}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \varepsilon}$$

Für die Spannung über dem Dielektrikum zwischen r_i und r_a gilt jetzt

$$U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad U = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\Psi}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \varepsilon \cdot l} \cdot dr$$

$$U = \frac{\Psi}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l} \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} \cdot dr$$

Die Lösung für das Integral finden wir z.B. im Tafelwerk:

$$U = \frac{\Psi}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}$$

Wir setzen das Ergebnis, nach Ψ umgestellt in die Gleichung der Feldstärke ein:

$$\vec{E} = \frac{U \cdot 2 \cdot \pi \cdot l \cdot \varepsilon}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \varepsilon \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}} = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}}$$

Die höchste Feldstärke $\vec{E} = \vec{E}_{\max}$ tritt auf dem Innenradius auf, also für $r = r_i$:

$$\vec{E}_{\max} = \frac{U}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

Für den Minimalwert von \vec{E}_{\max} ermitteln wir den Extremwert der Funktion im Nenner:

$$N'(E_{\max}) = 0 = \ln \frac{r_a}{r_i} - 1 \quad \ln \frac{r_a}{r_i} = 1 \quad \frac{r_a}{r_i} = e$$

$$\frac{r_i}{r_a} = \frac{1}{e} = \underline{0,3678}$$

4.1.3 Kapazität

Zwei isoliert voneinander angeordnete Metallplatten sind in der Lage, elektrische Ladungen aufzunehmen und zu speichern (Abbildung 18). Das „Fassungsvermögen“ C für die Ladungen ist umgekehrt proportional der anliegenden Spannung und wird als Kapazität der Anordnung bezeichnet:

$$C = \frac{Q}{u} = \frac{\int DdA}{\int Eds}$$

Die Maßeinheit der Kapazität ist das Farad (F).

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = 1 \frac{As}{V} = 1F$$

Personen:

Michael Faraday (1791 – 1867) war ein englischer Naturforscher. Er gilt als einer der bedeutendsten Experimentalphysiker und chemischen Analytiker. In einfachen Verhältnissen aufgewachsen, führte der gelernte Buchbinder (der viele seiner Bücher vor dem Binden las) etwa 30000 Experimente durch und verfasste 450 wissenschaftliche Artikel. In Würdigung der Leistungen Faradays wurden unter anderem ein Mondkrater und ein Asteroid nach ihm benannt.



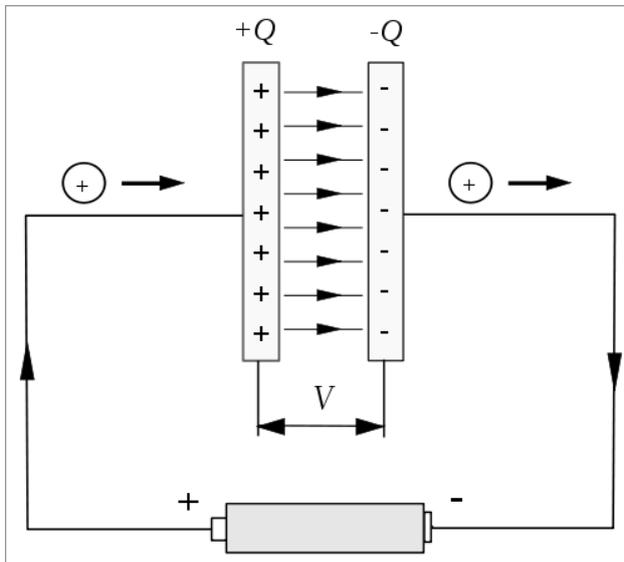


Abbildung 18: Prinzip Plattenkondensator

Bei „einfachen Anordnungen lässt sich als Berechnungsweg folgender Algorithmus wählen:

$$Q \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow u \longrightarrow C$$

Beispielsweise ist die Vorgehensweise für den Fall des idealen Plattenkondensators (homogenes Feld):

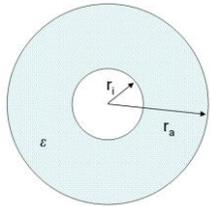
$$Q = \int D dA = D * A \quad D = \frac{Q}{A} \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{A * \epsilon}$$

$$u = \int_0^s E ds = \frac{Q}{A * \epsilon} * s \quad C = \frac{Q}{u} = \frac{Q * \epsilon * A}{Q * s} = \frac{\epsilon * A}{s} = \frac{\epsilon_0 * \epsilon_r * A}{s}$$

Die Kapazität C ist von der Permittivität des Dielektrikums zwischen den metallischen Elektroden und der geometrischen Anordnung abhängig. Die Kapazität steigt bei der Vergrößerung der Elektrodenfläche, der Verringerung des Elektrodenabstandes und der Erhöhung der Permittivität des Dielektrikums.

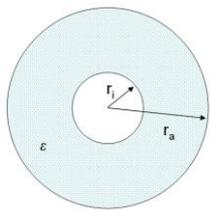
Hier noch die Formeln zur Berechnung einiger „Standardfälle“¹¹:

Konzentrische Zylinder



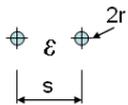
$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

Konzentrische Kugeln



$$C = 4\pi\epsilon \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} \right)$$

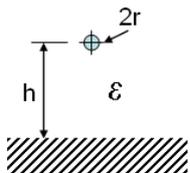
Paralleldrahtleitung



$$C = \pi\epsilon l * \ln \frac{s}{r}$$

$$s \gg r$$

Einzelleiter über Erde:



$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left(\frac{2h}{r} \right)}$$

¹¹ Quelle: Elschner/Möschwitzer [2], S. 197

Beispiel:

Berechnen Sie die erforderliche Fläche der Elektroden für einen Plattenkondensator mit $C = 1F$, Luft als Dielektrikum und einem Plattenabstand $s = 1mm$!

$$C = \frac{A * \epsilon_0 * \epsilon_r}{s} \quad A = \frac{C * s}{\epsilon_0 * \epsilon_r} = \frac{1As * 1mm * Vm}{V * 8,854 * 10^{-12} As} = 0,113 * 10^9 m^2 = \underline{113km^2}$$

Diese Fläche entspricht etwa 1/3 der Flächengröße von Dresden.

Jede Änderung der Ladung auf dem Kondensator ist mit einem Ladungstransport durch die Zuleitungen verbunden. Nach der Definition der Kapazität als Quotient aus Ladung und anliegender Spannung gilt folglich:

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

Die Änderung der Ladung über die Zeit entspricht dem Stromfluss, als zeitabhängige Größe kennzeichnen wir den Wert durch Kleinbuchstaben:

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt} \quad (\text{Gleichung gilt nur für konstante Kapazität})$$

Ein Strom fließt nur dann, wenn sich die Spannung am Kondensator ändert, mit der Ladungsänderung auf den Kondensatorplatten ist eine Änderung des Verschiebungsflusses im Dielektrikum verbunden. Diese Änderung wird in Analogie zum Leitungsstrom auch „Verschiebungsstrom“ genannt. Der Verschiebungsstrom i_v stellt keinen Ladungstransport im „klassischen Sinn“ dar (er findet ja im nicht leitenden Dielektrikum statt).

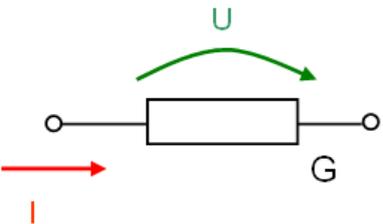
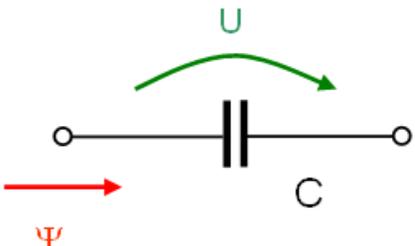
$$i_v = \frac{d\Psi_{ges}}{dt}$$

Für die Spannung über dem Kondensator gilt:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i * dt + u(0)$$

4.1.4 Kondensatorschaltungen

Für die Berechnung von Kondensatorschaltungen lassen sich Analogien zu Widerstandsnetzwerken anwenden (genau genommen von Netzwerken mit Leitwerten)¹²:

Widerstandsnetzwerke	Kondensatornetzwerke
	
I	Ψ
U	U
$I = G * U$	$\Psi = C * U$
Maschensatz $\sum U = 0$	$\sum U = 0$
Knotensatz $\sum I = 0$	$\sum \Psi = 0$

Parallelschaltung:

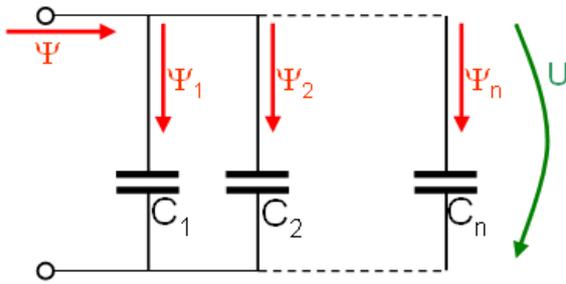
$$\Psi = C * U \quad \Psi_v = C_v * U$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \dots + \Psi_n$$

$$C * U = (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n) * U$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = \sum_{v=1}^n C_v$$

¹² Quelle: Herzig [3] S. 188

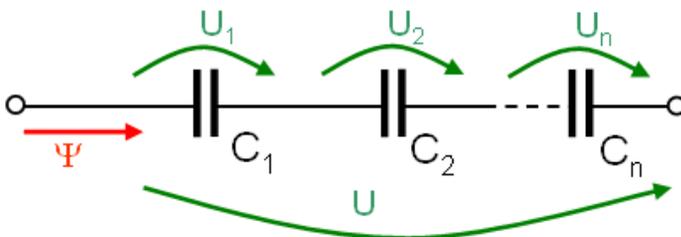
**Reihenschaltung:**

$$U = \frac{\Psi}{C} \qquad U_v = \frac{\Psi}{C_v}$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$\frac{\Psi}{C} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) * \Psi$$

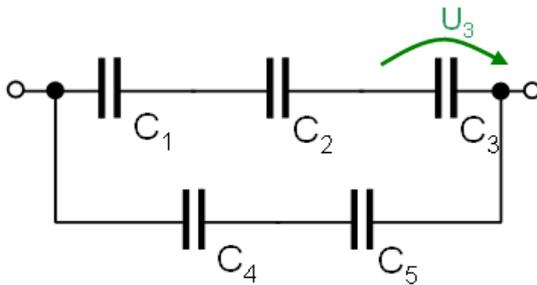
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{v=1}^n \frac{1}{C_v}$$



Gemischte Schaltungen werden durch schrittweises Zusammenfassen analog zu Widerstandsnetzen berechnet.

Beispiel:

Berechnen Sie die Spannungsverteilung an den Kondensatoren sowie die Kapazität zwischen den Klemmen!



$$C_1 = 10\mu F, C_2 = 20\mu F$$

$$C_3 = 30\mu F, C_4 = 40\mu F$$

$$C_5 = 50\mu F$$

$$U_3 = 10V$$

Zunächst berechnen wir den Fluss über den Kondensatoren $C_{1..3}$:

$$\Psi_3 = C_3 * U_3 = 30\mu F * 10V = \underline{300\mu AS}$$

Damit ist die Ermittlung der Spannungen über C_1 und C_2 einfach:

$$U_1 = \frac{\Psi_3}{C_1} = \frac{300\mu AS}{10\mu F} = \underline{30V} \quad U_2 = \frac{\Psi_3}{C_2} = \frac{300\mu AS}{20\mu F} = \underline{15V}$$

Die Gesamtspannung über der Schaltung beträgt folglich:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \underline{55V}$$

Nach Maschensatz gilt:

$$U = U_4 + U_5$$

Die Ersatzkapazität für C_4 in Reihe zu C_5 berechnen wir analog zur Reihenschaltung von Leitwerten, wir erhalten für Ψ_5 :

$$\Psi_5 = C_{45} * U = \frac{C_4 * C_5}{C_4 + C_5} * U = 22,2\mu F * 55V = \underline{1221\mu As}$$

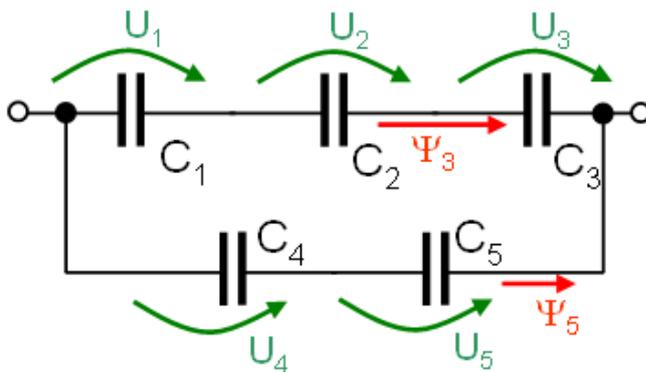
Für die Spannungen über C_4 und C_5 folgt:

$$U_4 = \frac{\Psi_4}{C_4} = \frac{1221 \mu\text{AS}}{40 \mu\text{F}} = \underline{30,5\text{V}}$$

$$U_5 = U - U_4 = 55\text{V} - 30,5\text{V} = \underline{24,5\text{V}}$$

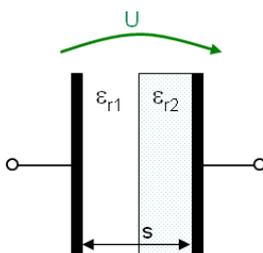
Wir ermitteln schließlich die Kapazität zwischen den Klemmen unter Nutzung des Zwischenergebnisses für die Reihenschaltung C_4 und C_5 :

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1} + C_{45} \quad C = \left(\frac{1}{10 \mu\text{F}} + \frac{1}{20 \mu\text{F}} + \frac{1}{30 \mu\text{F}} \right)^{-1} + 22,2 \mu\text{F} = \underline{27,65 \mu\text{F}}$$

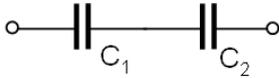


Beispiel 2:

Gegeben ist folgende Anordnung: Zwei kreisrunde Platte mit einem Durchmesser von $r = 10\text{cm}$ stehen sich im Abstand von $s = 1\text{cm}$ gegenüber. Der Raum zwischen den Platten ist zur Hälfte mit Luft $\epsilon_{r1} \approx 1$, zur anderen Hälfte mit einem Dielektrikum $\epsilon_{r2} = 3$ ausgefüllt. Berechnen Sie die Ladung und die Kapazität der Anordnung sowie den Feldstärke- und Spannungsverlauf, wenn an die Platten eine Spannung von $U = 1\text{kV}$ gelegt wird!



Zunächst berechnen wir die Kapazität der Anordnung, die wir als die Reihenschaltung von zwei Kondensatoren modellieren:



$$C_1 = \frac{\pi * r^2 * \epsilon_0 * \epsilon_{r1}}{s/2} \quad C_2 = \frac{\pi * r^2 * \epsilon_0 * \epsilon_{r2}}{s/2}$$

$$C_1 = \frac{3,14 * 100 \text{cm}^2 * 8,86 * 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} * 1}{0,5 \text{cm}} = \underline{55,6 \text{pF}}$$

$$C_2 = \frac{3,14 * 100 \text{cm}^2 * 8,86 * 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} * 3}{0,5 \text{cm}} = \underline{166,8 \text{pF}}$$

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \underline{41,7 \text{pF}}$$

Für die Ladung folgt aus $\frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt}$ wegen $\frac{dQ}{dt} = \frac{dU}{dt} = 0$:

$$Q = C * U = 41,7 * 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{V}} * 1000 \text{V} = \underline{41,7 * 10^{-9} \text{As}}$$

Für den Verlauf der Spannung gilt:

$$U = \int_s \vec{E} * d\vec{s} = \int_0^{s/2} E_1 d\vec{s} + \int_{s/2}^s E_2 d\vec{s}$$

$$U = E_1 * \frac{s}{2} + E_2 * \frac{s}{2}$$

Die Verschiebungsdichte ist in beiden Medien gleich:

$$D = \epsilon_1 * E_1 = \epsilon_2 * E_2$$

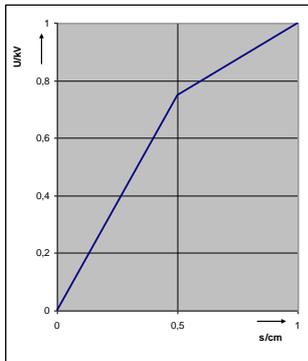
$$E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} * E_1$$

Mit der Gleichung für die Spannung ergibt sich für die Feldstärken:

$$U = E_1 * \frac{s}{2} + E_1 * \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} * \frac{s}{2}$$

$$E_1 = \frac{U}{\frac{s}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)} = \frac{1kV}{0,5cm * 1,33} = 1,5 \frac{kV}{cm}$$

$$E_2 = \frac{U}{\frac{s}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)} = \frac{1kV}{0,5cm * 4} = 0,5 \frac{kV}{cm}$$



Der über den Teilstrecken entstehende Spannungsabfall beträgt:

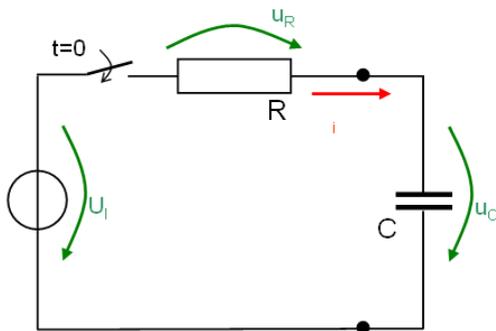
$$U_1 = \int_0^{\frac{s}{2}} E_1 ds = E_1 * \frac{s}{2} = 1,5 \frac{kV}{cm} * 0,5cm = \underline{0,75kV}$$

$$U_2 = \int_{\frac{s}{2}}^s E_2 ds = E_2 * \frac{s}{2} = 0,5 \frac{kV}{cm} * 0,5cm = \underline{0,25kV}$$

4.1.5 Lade- und Entladevorgänge an Kondensatoren

Durch den Kondensator kann wegen des isolierenden Dielektrikums kein Strom fließen, nur während einer Änderung des Feldes findet ein Energieaustausch und damit Stromfluss statt. Die Berechnung erfolgt mit den schon in Kapitel 1 behandelten Verfahren zur Netzwerkanalyse, wir beachten hier lediglich das besondere Strom-Spannungs-Verhalten des Kondensators:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i * dt + u(0) \qquad i(t) = C * \frac{du}{dt}$$



Für den Ladevorgang des Kondensators $t \geq 0$ folgt:

$$\text{Maschengleichung: } -U_l + u_R + u_C = 0 \qquad u_R + u_C = U_l$$

$$u_R = R \cdot i \qquad i = C \frac{du_C}{dt}$$

Wenn wir die Gleichungen auf die drei Fälle $t < 0$, $t = 0$ und $t \gg 0$ anwenden, ergibt sich folgendes Bild:

$$t < 0$$

Der Schalter ist geöffnet, der Strom $i = 0$, folglich gilt $u_R = 0$. Wir gehen davon aus, dass auch der Kondensator ungeladen ist, es gilt also $u_C = 0$. Die Spannung U_l fällt über den geöffneten Schalterkontakten ab.

$$t = 0$$

Die Spannung am Kondensator kann nicht „springen“ sie muss stetig sein. Wegen

$$i = C \frac{du_C}{dt} \text{ wäre bei einem Spannungssprung } \frac{du_C}{dt} = \infty \text{ und damit die Leistung } p = u \cdot i = \infty,$$

was physikalisch nicht möglich ist. Damit gilt:

$$u_C(t < 0) = u_C(t = 0) = 0$$

$$u_R + u_C = U_l \qquad u_R = U_l \qquad i = \frac{u_R}{R} = \frac{U_l}{R}$$

$$t \gg 0$$

Der Kondensator hat sich auf die Spannung $u_C = U_I$ aufgeladen.

$$u_R = 0 \quad i = \frac{u_R}{R} = 0$$

Übergang (Differenzialgleichung)

Allgemein gilt für den Strom in der Schaltung

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{und} \quad u_R = R \cdot i = RC \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$U_I = u_R + u_C = RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C$$

Die Lösung der Differenzialgleichung lautet:

$$u_C = U_I (1 - e^{-t/RC})$$

Nach Einsetzen in die Maschengleichung erhalten wir für den Strom i :

$$i = i_C = \frac{U_I}{R} \cdot e^{-t/RC}$$

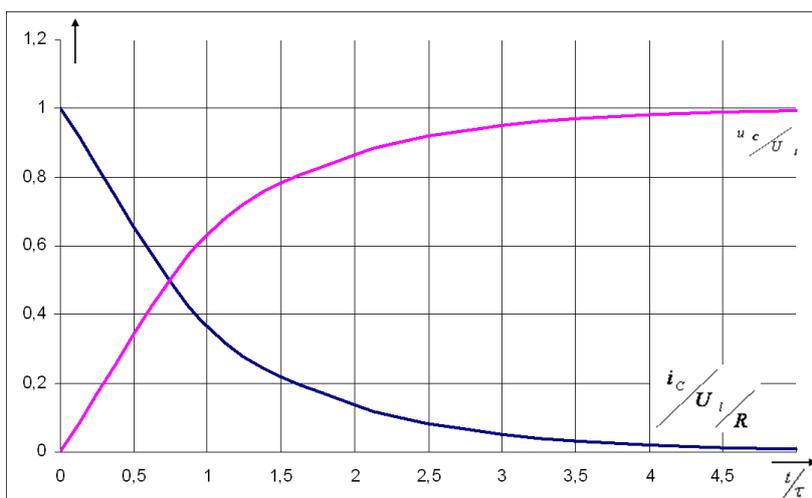


Abbildung 19: Verlauf von Spannung und Strom beim Einschalten einer Kapazität in den Gleichstromkreis

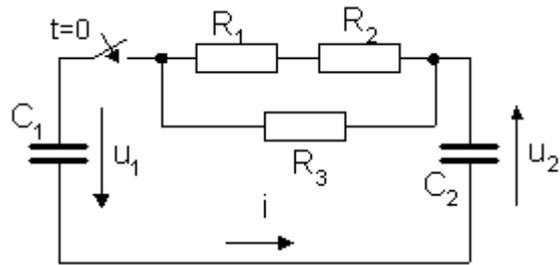
Beispiel (Endrunde 2008):

Gegeben ist die Schaltung.

$$C_1 = 5\mu\text{F} \quad C_2 = 1\mu\text{F}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1\text{M}\Omega$$

Der Kondensator C_1 ist auf die Spannung $U_1 = 200\text{V}$ aufgeladen. Der Schalter wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen.



- Berechnen Sie die Spannungen u_1 und u_2 für $t \gg 0$!
- Berechnen Sie die in den Kondensatoren gespeicherte Energie für die Zeiten $t < 0$ und $t \gg 0$!
- Welchen Wert hat der Strom unmittelbar nach dem Schließen des Schalters?

Zur Vereinfachung der Schaltung ermitteln wir zunächst den Ersatzwiderstand R :

$$R = \frac{(R_1 + R_2) * R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \underline{0,667\text{M}\Omega}$$

- a) Für $t \gg 0$ ist der Strom durch die Widerstände $i_r = 0$, die Ladung von C_1 hat sich „verteilt“:

$$Q = C_1 U_{1(t<0)} = 5\mu\text{F} * 200\text{V} = \underline{1\text{mAs}}$$

$$Q = (C_1 + C_2) U_{2(t>>0)} \quad C_1 U_{1(t<0)} = (C_1 + C_2) U_{2(t>>0)}$$

$$U_{2(t>>0)} = U_{1(t<0)} * \frac{C_1}{(C_1 + C_2)} = \underline{167\text{V}}$$

Unter Beachtung der Richtungen der beiden Spannungen gilt:

$$\underline{\underline{u_1 = 167\text{V}}} \quad \underline{\underline{u_2 = -167\text{V}}}$$

b) Zum Zeitpunkt $t < 0$ ist der Kondensator C_2 entladen ($Q_2 = 0$), C_1 trägt die bereits oben berechnete Ladung $Q = \underline{1mAs}$. Für $t \gg 0$ gilt:

$$Q_1 = C_1 * u_1 = 5\mu F * 167V = \underline{0,835mAs}$$

$$Q_2 = C_2 * -u_2 = 1\mu F * 167V = \underline{0,167mAs}$$

Probe:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \underline{1,00mAs}$$

c) Für den Strom unmittelbar nach Schließen des Schalters gilt der Maschensatz:

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{U_{c_1}}{R} = \frac{200V}{0,667M\Omega} = \underline{0,299mA}$$

4.1.6 Energie und Kräfte im elektrostatischen Feld

Energie

Das elektrische Feld ist ein Energiespeicher. Die z.B. im Feld eines Kondensators gespeicherte Energie ist durch die Ladung auf den Elektroden und die Spannung zwischen den Elektroden bestimmt. Mechanische Energie, die für die Verschiebung von Ladungen oder Grenzflächen aufgewendet wird, wandelt sich reversibel in elektrische Feldenergie um. Die elektrische Energie, die zum Laden eines Kondensators aufgewendet wird, speichert dieser in Form der Feldenergie und gibt sie als elektrische Energie wieder zurück. Die Ladungsträger begrenzen den Feldraum, sie speichern selbst keine Energie.

Die zum Laden eines Kondensators benötigte Energie ist:

$$W = \int_0^t u * i dt = \int_0^Q u dQ = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C}{2} u^2$$

Nach dem Energieerhaltungssatz ist dies die im Feld gespeicherte Energie.

Beispiel:

Wie groß ist die in einem Kondensator $C = 1000\mu F$ bei $U = 200V$ gespeicherte Energiemenge?

$$W = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ As} \cdot 4 \cdot 10^4 \text{ V}^2}{2 \text{ V}} = 20 \text{ VAs} = \underline{20 \text{ Ws}}$$

Diese Energiemenge ist, z.B. verglichen mit dem Speichervolumen chemischer Spannungsquellen, sehr gering. Der Vorteil der Energiespeicherung im Feld ist die sehr schnelle Umkehrbarkeit der Prozesse, dadurch ergeben sich wegen $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ sehr große Leistungen.

Kraft auf Punktladungen

Eine Ladung Q durchläuft im elektrischen Feld längs einer Feldlinie eine Spannungsdifferenz, damit ändert sich ihre potentielle Energie:

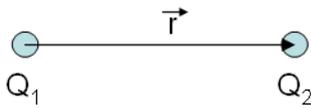
$$dW = Q \cdot dU$$

Diese Energieänderung entspricht aber auch einer Kraftwirkung längs des zurückgelegten Weges ds :

$$dW = F \cdot dl \quad \text{Folglich gilt: } F \cdot dl = QdU \quad F = Q \frac{dU}{dl} = Q \cdot E$$

Die Kraft wirkt auf eine positive Ladung in Richtung der Feldlinien (Vektoreigenschaft).

Die Kräfte auf zwei Ladungen im elektrischen Feld werden durch das Coulombsche Gesetz beschrieben:



$$F = \frac{Q_1 * Q_2}{4\pi r^2}$$

Die Ladung Q_1 erzeugt am Ort von Q_2 die Verschiebungsdichte D_1 und die Feldstärke E_1 :

$$D_1 = \frac{Q_1}{4\pi r^2} \quad E_1 = \frac{Q_1}{4\pi r^2 \epsilon}$$

Die Ladung Q_2 erfährt dabei die Kraft

$$\vec{F}_2 = Q_2 * \vec{E}_1 = \frac{Q_1 * Q_2}{4\pi \epsilon r^2}$$

Die Betrachtung ist auf Q_2 umkehrbar.

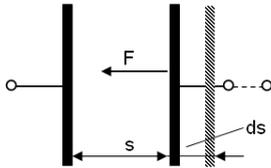
Kräfte zwischen planparallelen Platten

Die geladenen Platten eines (idealen) Plattenkondensators wirken ebenso wie zwei Punktladungen mit einer Kraft aufeinander. Für unsere Betrachtung nehmen wir an, dass sich auf den Platten eine konstante Ladung befindet, die weder zu- noch abfließen kann.

Ausgehend von der bereits bekannten Gleichung für den Energieinhalt der Anordnung erhalten wir:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 * s}{2 * \epsilon * A}$$

Eine Vergrößerung des Plattenabstandes ds ergibt bei $Q = \text{konst.}$ eine Erhöhung des Energieinhaltes, welcher nach dem Energieerhaltungssatz gleich der aufgewendeten mechanischen Arbeit ist:



$$dW = \left(\frac{Q^2}{2 * \epsilon * A} \right) ds = F ds$$

Für die „zusammenziehende“ Kraft zwischen den Platten gilt also:

$$F = \frac{Q^2}{2 * \epsilon * A} = \frac{E^2 * \epsilon * A}{2}$$

4.1.7 Bewegung freier Ladungen im elektrostatischen Feld

Bringt man freie Ladungen in ein elektrisches Feld, so wird eine Kraft auf sie ausgeübt, welche positive Ladungen in Feldrichtung beschleunigt. Zwischen der Beschleunigung und der Kraft gilt die Newtonsche Bewegungsgleichung.

$$F = m * a$$

Mit $F = Q * E$ folgt:

$$a = \frac{Q * E}{m} = \frac{Q}{m} * \frac{dU}{dl} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{Q}{m} * \frac{dU}{dl}$$

mit $v = \frac{dl}{dt}$ wird schließlich:

$$v * dv = \frac{Q}{m} dU \quad v = \sqrt{\frac{2Q}{m} U}$$

Beispiel (Vorrundenaufgabe 2009):

In einer „Braunschen Röhre“ werden Elektronen eines Elektronenstrahls durch Ablenkkondensatoren so abgelenkt, dass man mit dem Strahl den Bildschirm abtasten kann. Auf ihm wird eine sinusförmige Kurve abgebildet. Der Schirm ist $x = 21,2\text{cm}$ vom Ablenkensystem entfernt. Der für die maximale Auslenkung von $y_{\text{max}} = 1,5\text{cm}$ zuständige Ablenkkondensator hat parallele Platten der Länge $l = 5\text{cm}$ mit einem Abstand von $d = 2,6\text{cm}$.

Die Elektronen treten mittig und senkrecht zu den Feldlinien mit der Energie $E_{\text{kin}} = 420\text{eV}$ in das elektrische Feld des Kondensators ein. Berechnen Sie die maximale am Ablenkkondensator auftretende Spannung!

Lösung:

Die Elektronen des Elektronenstrahls durchlaufen auf dem gesamten Weg bis zum Schirm eine gleichförmige Bewegung in x-Richtung $v = v_x = \text{konst}$.

Durch das Feld des Kondensators werden sie in y-Richtung gleichmäßig beschleunigt, nach Durchlaufen des Kondensators ist auch diese Bewegung gleichförmig. Zunächst ermitteln wir aus der kinetischen Energie des Strahls die Geschwindigkeit in x-Richtung (Masse des Elektrons: $m_{0e} = 0,910 \cdot 10^{-30}\text{kg}$).

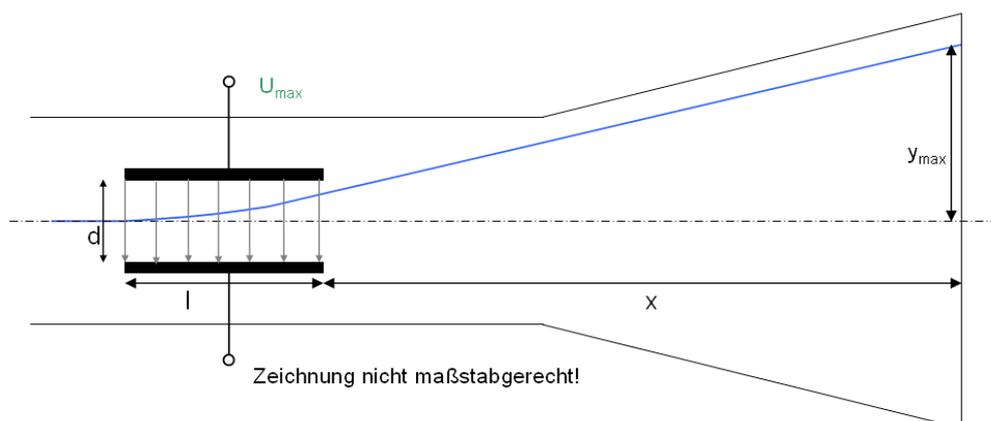


Abbildung 20: Ablenkung des Elektronenstrahls in der Braunschen Röhre

$$1 \text{ Nm} = 6,241 * 10^{18} \text{ eV} \quad E_{kin} = 420 \text{ eV} = 67279 * 10^{-17} \text{ Nm} = 7,279 * 10^{-17} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2} v_x^2 \quad v_x = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m_{0e}}} = \sqrt{\frac{2 * 6,729 * 10^{-17} \text{ kgm}^2}{0,910 * 10^{-30} \text{ kg} * \text{s}^2}} = 1,2 * 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Elektronenstrahl wird innerhalb des Kondensators um y_k , auf der Strecke vom Kondensator bis zum Schirm um y abgelenkt:

$$y_{\max} = y + y_k$$

Für die Ablenkung des Strahls innerhalb des Kondensators gilt:

$$y_k = \frac{a}{2} * t^2 = \frac{a}{2} * \frac{l^2}{v_x^2} \quad y_k = \frac{U * e}{2m * d} * \frac{l^2}{v_x^2}$$

Außerhalb der Kondensatorplatten gilt für die Bewegung in y-Richtung:

$y = v * t$ (allgemeine Gleichung für gleichförmige Bewegung, v ist die Endgeschwindigkeit in y-Richtung nach Beschleunigung innerhalb des Kondensators, die Zeit t benötigt der Elektronenstrahl, um die Distanz x bis zum Schirm zurück zu legen:

$$y = \frac{U * e}{m * d} * t_k * \frac{x}{v_x}$$

t_k Zeit, die Elektronenstrahl innerhalb des Kondensators zurückgelegt hat

$$y = \frac{U * e}{m * d} * \frac{l}{v_x} * \frac{x}{v_x} = \frac{U * e * l * x}{m * d * v_x^2}$$

Mit $y_{\max} = y + y_k$ ergibt sich schließlich:

$$y_{\max} = U_{\max} \left(\frac{e * x * l}{m * d * v_x^2} + \frac{e * l^2}{2m * d * v_x^2} \right)$$

$$U_{\max} = \frac{y_{\max}}{\left(\frac{e * x * l}{m * d * v_x^2} + \frac{e * l^2}{2m * d * v_x^2} \right)}$$

$$U_{\max} = \frac{1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{\left(\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 21,2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{0,910 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 1,44 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} + \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2 \cdot 0,910 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 1,44 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \right)}$$

$$U_{\max} = \frac{1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{5,03 \cdot 10^{-4} \frac{\text{As} \cdot \text{s}^2}{\text{kgm}} + 5,87 \cdot 10^{-5} \frac{\text{As} \cdot \text{s}^2}{\text{kgm}}} \quad \text{Da } 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{ VAs}$$

$$\underline{\underline{U_{\max} = 26,7 \text{ V}}}$$

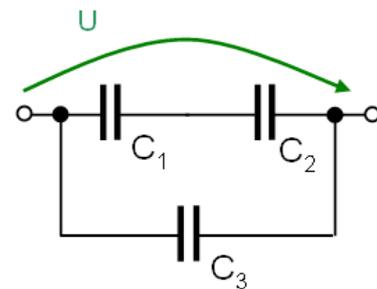
4.2 Übungsaufgaben

4.2.1 Aufgabe 1 (Vorrunde 2010)

Berechnen Sie für die abgebildete Schaltung mit den Kondensatoren $C_1 = 5 \mu\text{F}$, $C_2 = 11 \mu\text{F}$ und $C_3 = 4 \mu\text{F}$

a) die Gesamtkapazität und

b) die Teilspannungen U_1 und U_2 bei einer Gesamtspannung von $U = 130 \text{ V}$!



$$C_{ges} = C_3 + \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \underline{\underline{7,34 \mu\text{F}}}$$

$$\frac{U_1}{U} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$U_1 = \frac{C_2 \cdot U}{C_1 + C_2} = \frac{11 \mu\text{F} \cdot 130 \text{ V}}{16 \mu\text{F}} = \underline{\underline{89,3 \text{ V}}}$$

$$U_2 = U - U_1 = 130 \text{ V} - 89,3 \text{ V} = \underline{\underline{40,6 \text{ V}}}$$

4.2.2 Aufgabe 2 (Endrunde 2000)

Berechnen Sie die Kapazität des Plattenkondensators!

$$A = a \cdot b$$

$$a = b = b_1 = 10\text{cm}$$

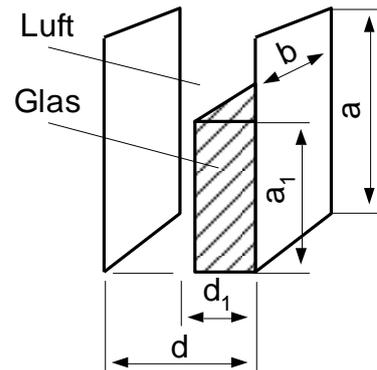
$$a_1 = 4\text{cm}$$

$$d = 5\text{mm}$$

$$d_1 = 2\text{mm}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

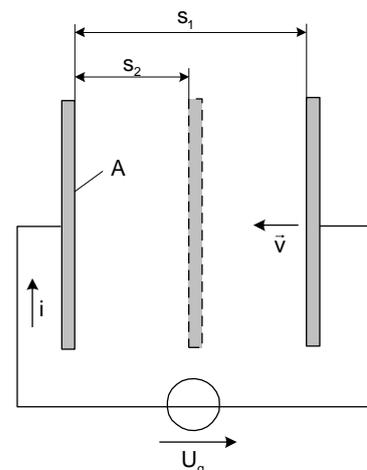
Dielektrikum mit d_1 (Glas): $\epsilon_r = 6$



4.2.3 Aufgabe 3 (Endrunde 2009)

The following plate capacitor (A , d , ϵ_0) is given (figure): Two metal plates with the area of $A = 1,2\text{m}^2$, the distance $s_1 = 1\text{mm}$ and the air-dielectric $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$. The plates are connected with a DC voltage source of $U_q = 1500\text{V}$. The right plate is moved now until the distance is $s_2 = 0,5\text{mm}$.

- Calculate the stored electrical energy of the capacitor before and after the movement!
- Calculate the mechanical work which is necessary for the movement!



4.3 Experimentelle Untersuchungen zum elektrischen Feld

4.3.1 Versuchsziel

Kennenlernen einer experimentellen Methode zur Ermittlung elektrischer Felder (elektrischer Trog). Festigung der Kenntnisse über die Grundgrößen im elektrischen Feld und Anwendung der Analogiebeziehungen zwischen dem elektrischen Strömungsfeld und dem elektrostatischen Feld.

Auf der Grundlage des Vergleichs von geschlossen berechenbaren und den experimentell ermittelten Feldgrößen bei vorgegebenen Elektrodenanordnungen (ohne und mit Quergrenzflächen) soll das Wissen über die räumliche Verteilung des elektrischen Potentials φ sowie der elektrischen Feldstärke E gefestigt werden.

4.3.2 Versuchsvorbereitung

Erarbeiten Sie sich eine Übersicht zu den Feldgrößen im elektrischen Feld. Stellen Sie dabei insbesondere die Analogiebeziehungen zwischen den Feldgrößen im stationären Strömungsfeld und im elektrostatischen Feld dar.

Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf des elektrischen Potentials $\varphi(r)$ und der elektrischen Feldstärke $E(r)$ entlang des Radius' r zwischen zwei coaxial angeordneten zylindrischen Elektroden (Bild 1). Das Dielektrikum zwischen den Elektroden ist ungeschichtet.

Wie ändern sich das elektrische Potential $\varphi(r)$ und die elektrische Feldstärke $E(r)$ entlang des Radius' r zwischen den beiden coaxial angeordneten Elektroden, wenn das Dielektrikum geschichtet wird (Bild 2)? Das Verhältnis der relativen Dielektrizitätszahlen der beiden geschichteten Dielektrika $\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$ wird mit 2 angenommen.

Wie ist beim elektrolytischen Trog die Dicke der Elektrolytschicht zwischen dem Radius r_i und dem Radius r_a zu verändern, wenn die elektrische Feldstärke im stationären Strömungsfeld an der inneren Elektrode gegenüber dem Fall mit konstanter Elektrolytschichtdicke abgesenkt werden soll?

Berechnen Sie das Verhältnis r_i/r_a , für das die Höchstfeldstärke E_{\max} ein Minimum wird

(koaxiale Elektrodenanordnung)! Stellen Sie die Funktion $E_{\max} = f(r_i/r_a)$ grafisch dar

($r_i/r_a = 0 \dots 1$).

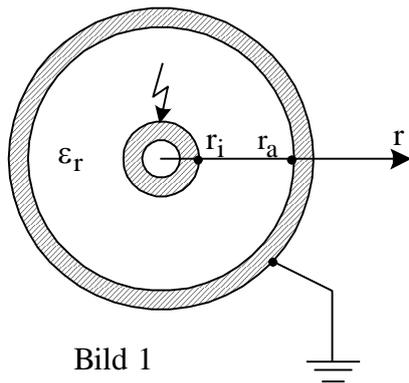


Bild 1

$$U_{\sim} = 12V$$

$$r_a = 275mm$$

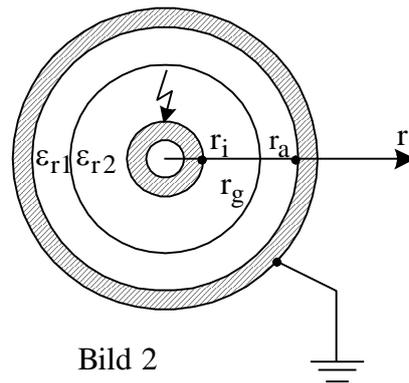


Bild 2

$$r_g = 150mm$$

$$r_i = 50mm$$

4.3.3 Versuchsdurchführung

Aufgabe 1: Messung der elektrischen Potentialverteilung $\varphi(r)$ zwischen zwei koaxialen Zylindern ohne Quergrenzfläche

Im elektrolytischen Trog ist der Verlauf des elektrischen Potentials $\varphi(r)$ entlang des Radius r zwischen den beiden koaxial angeordneten zylindrischen Elektroden zu ermitteln (Bild 1). Die Höhe der Elektrolytschicht ist konstant zu wählen.

Die Ermittlung des elektrischen Potentials im stationären elektrischen Strömungsfeld erfolgt mit Hilfe einer Messsonde im Elektrolyten. Zur Kennzeichnung der Sondenposition ist am Boden des elektrolytischen Troges ein Koordinatensystem angebracht.

Aufgabe 2: Messung der elektrischen Potentialverteilung $\varphi(r)$ zwischen zwei coaxialen Zylindern mit Quergrenzfläche

Ausgehend von der Versuchsanordnung gemäß Bild 3 soll im elektrolytischen Trog eine koaxiale Zylinderanordnung mit quer geschichtetem Dielektrikum nachgebildet werden. Das Verhältnis der Dielektrizitätszahlen $\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}$ beträgt >1 . Unter Ausnutzung der Analogiebeziehungen zwischen dem elektrostatischen und dem Strömungsfeld ist die Schichtung durch eine unterschiedliche Höhe des Elektrolyten nachzubilden. Wählen Sie dazu eine der beiden Piacrylscheiben aus, damit oben genannte Abstufung der Dielektrizitätszahlen und damit die folgerichtige Veränderung der elektrischen Feldstärke an der inneren Elektrode erreicht wird! Messen Sie erneut das Potential entlang des Radius aus. Setzen Sie besonders viele Messpunkte in die Nähe der Stufung der Elektrolytschichtdicke.

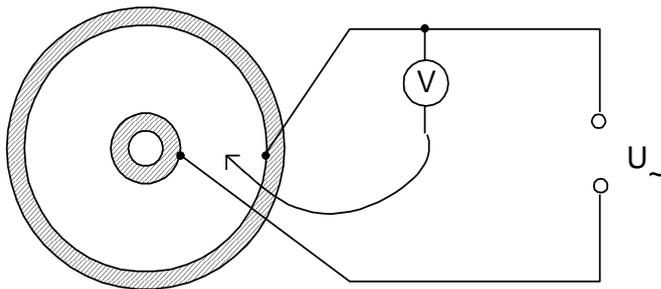


Bild 3: Schaltung zur Ermittlung des Potentials im elektrischen Trog

Aufgabe 3: Optimierung der coaxialen Zylinderanordnung

Variieren Sie bei konstantem Radius der äußeren Elektrode r_a ($r_a = 275\text{mm}$) den Radius der inneren Elektrode r_i ($r_i = 12,5 \dots 150\text{mm}$) und bestimmen Sie jeweils die Höchstfeldstärke der Anordnung ($E_{\text{max}} = \Delta\varphi/\Delta x$ mit $\Delta x = 10\text{mm}$).

4.3.4 Versuchsauswertung

Stellen Sie die im elektrolytischen Trog gemessenen Verläufe des elektrischen Potentials $\varphi(r)$ gemäß Aufgabe 1 im elektrischen Strömungsfeld grafisch dar und ermitteln Sie daraus den Verlauf der elektrischen Feldstärke $E(r)$.

Konstruieren Sie das vollständige Feldbild für die koaxiale Zylinderanordnung. Beschränken Sie sich unter Ausnutzung der Symmetrie des Feldes auf einen Quadranten.

Berechnen Sie den Verlauf der elektrischen Feldstärke $E(r)$ zwischen der inneren und der äußeren Elektrode unter der Annahme, dass zwischen den Elektroden ein einheitliches leitfähiges Medium oder ein geschichtetes Dielektrikum eingebracht wurde. Vergleichen Sie das berechnete Ergebnis mit dem Messergebnis gemäß Aufgabe 2. Diskutieren Sie Abweichungen im Verlauf der Kurven.

Tragen Sie die im Versuch ermittelten Werte für E_{\max} in das Diagramm $E_{\max} = f\left(\frac{r_i}{r_a}\right)$ ein und vergleichen Sie die Werte mit der berechneten Kurve (Versuchsvorbereitung)

Anlage: Messwerttabelle:

Versuch: Elektrische Felder

Messwerte: Aufgabe 1 Aufgabe 2 Aufgabe 3

Δr / mm	ungeschichtet φ / V	geschichtet φ / V	r_i / mm	φ / V
0			12,5	
5			24	
10			50	
15			75	
20			100	
30			125	
40			150	
50				
60				
70				
80				
90				
95				
100				
105				
110				
115				
120				
130				
140				
150				
160				
170				
180				

190		
200		
210		
220		
230		

5 Magnetisches Feld

5.1 Grundlagenwissen

5.1.1 Magnetische Erscheinungen

Bestimmte Stahlsorten haben die Eigenschaft, Eisenteile anzuziehen, sie werden Magnete¹³ genannt. Magnetismus, hervorgerufen durch das magnetische Feld, äußert sich als Kraftwirkung zwischen Magneten, magnetisierten bzw. magnetisierbaren Gegenständen und bewegten elektrischen Ladungen wie z. B. in stromdurchflossenen Leitern. Ebenso wie das elektrische Feld ist auch das magnetische Feld ein besonderer energetischer Zustand des Raumes, der durch Kraftwirkungen nachgewiesen und durch Feldlinien charakterisiert werden kann. Die Festlegung der Feldrichtung erfolgt über die Polarität der Magneten, Feldlinien verlaufen vom Nord- zum Südpol in positiver Richtung. Die Feldlinien verlaufen als geschlossene Bahn – sie vermitteln den Eindruck eines Wirbels. Im Unterschied zum elektrostatischen Feld (Quellenfeld) spricht man beim magnetischen Feld von einem quellenfreien Feld oder Wirbelfeld. Je nach Feldverlauf unterscheidet man auch bei den Magnetfeldern homogene und inhomogene Felder. Magnetfelder können verursacht werden durch

- magnetische Materialien, etwa einen Dauermagneten,
- elektrische Ströme, z. B. eine stromdurchflossene Spule oder
- zeitliche Änderung eines elektrischen Feldes.

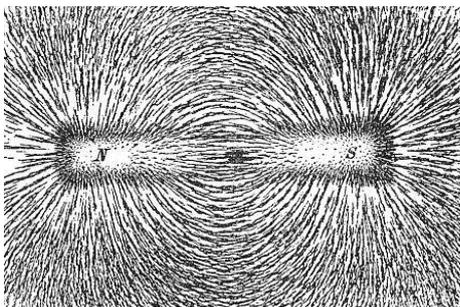


Abbildung 21: Veranschaulichung des Feldes eines Stabmagneten mittels Eisenspänen

¹³ Zur Herkunft des Namens gibt es verschiedene Deutungen, wahrscheinlich war die griechische Präfektur Magnesia, die ihrerseits nach dem mazedonischen Stamm der Magneten benannt wurde, der Pate.

Beispiel:

Welchen Zweck erfüllt eine stark magnetisierte Schraube, die in den Vorratsbehälter für Motoröl beim Auto ragt?

Antwort:

Im Motor gleiten die Kolben mit hoher Geschwindigkeit an den Zylinderflächen. Dadurch kommt es mit der Zeit zu metallischem Abrieb. Die Metallteilchen würden die Reibung erhöhen und Kratzspuren hinterlassen. Die magnetisierte Schraube im Ölbad zieht die Metallspäne aus dem Öl und verhindert somit Beschädigungen im Motor.

Personen:

Das magnetische Feld mit seinen Erscheinungen faszinierte schon früh die Menschen. Vor etwa vierhundert Jahren, im Jahre 1600, veröffentlichte William Gilbert, (1544-1603), späterer Leibarzt von Königin Elizabeth I von England, seine große Studie über den Magnetismus, "**De Magnete**". Unter anderem ging er hier auch der Behauptung nach, dass Knoblauch einem Magneten seine Kraft raube, wenn er an diesem gerieben wurde. Während manche seiner Zeitgenossen meinten, die Spitze der Kompassnadel werde vom Polarstern angezogen, zeigte er überzeugend, dass die Erde insgesamt als ein einziger Magnet mit zwei Polen angesehen werden muss.



Für lange, gerade stromdurchflossene Leiter stellen die Feldlinien konzentrische Kreise dar. Der Leiter wird von einem Magnetfeld(Wirbelfeld) umwirbelt, das sich in einer Ebene senkrecht zur Leiterachse als parallelebebenes Feld darstellen lässt. Zwischen der Stromrichtung und der Feldrichtung besteht ein Rechtswirbel, der durch Daumen und Finger der rechten Hand nachgebildet werden kann (rechte-Hand-Regel, Abbildung 22).

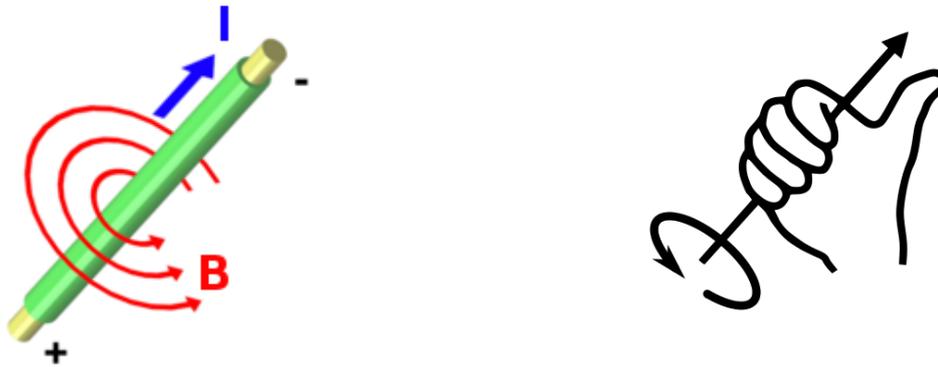


Abbildung 22: magnetisches Feld als "Rechtsschraube"

5.1.2 Physikalische Größen zur Beschreibung des Magnetfeldes

Flussdichte und magnetischer Fluss

Das magnetische Feld hat in jedem Punkt einen bestimmten Betrag und eine bestimmte Richtung, die durch den Feldvektor \vec{B} beschrieben werden (Abbildung 23). Diesen bezeichnet man als magnetische Flussdichte oder Induktion. Seine Maßeinheit ist das Tesla:

$$[B] = 1 \frac{Vs}{m^2} = 1T$$

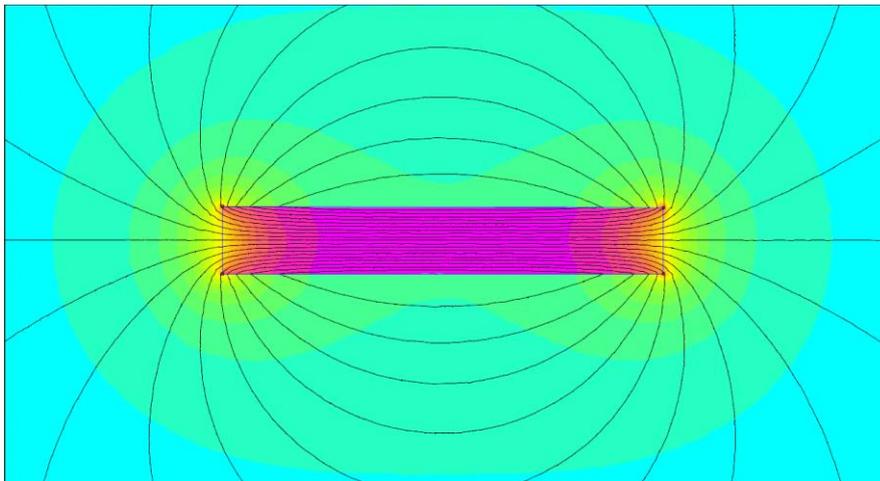


Abbildung 23: Feldlinienverlauf eines Stabmagneten, berechnet mit dem Programm "femm"

www.femm.info ¹⁴

¹⁴ Danke an Herrn S. Fleischer, Hochschule Zittau/Görlitz für die Erstellung der Grafik

Beispiele:

Das intergalaktische Magnetfeld, ausgedrückt als magnetische Flussdichte, schätzt man auf weniger als 0,1 nT (10^{-10} T), das der Milchstraße auf 30 nT. Das Magnetfeld der Erde hat an der Oberfläche eine Stärke um 40 μ T, dies entspricht im Gaußschem Einheitensystem 0,4 Gs. Die magnetische Flussdichte der Sonnenflecken liegt unter 1 mT. Die Sättigungsmagnetisierung von Eisen beträgt ca. zwei Tesla.

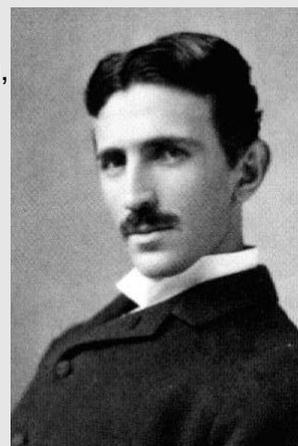
Auf der Oberfläche von Neutronensternen, wie z. B. Pulsaren, herrschen dagegen typischerweise Flussdichten von 10^8 Tesla, bei Magnetaren, einer speziellen Sorte von Neutronensternen, sogar 10^{11} Tesla.

Das mit 1 nT derzeit (2009) schwächste Magnetfeld auf der Erde findet man in einem speziell abgeschirmten kubischen Gebäude der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt in Berlin. Zweck des Kubus' ist die Messung der schwachen Hirnströme von Menschen. Am National High Magnetic Field Laboratory in Tallahassee (Florida) wird das mit 45 T derzeit stärkste (stabile) Magnetfeld auf der Erde erzeugt.

Höhere Magnetfelder können mit Elektromagneten nur in kurzen Pulsen erzeugt werden. Europarekord hierbei hält das Institut Hochfeld-Magnetlabor Dresden mit 87,2 T für maximal 150 ms (Quelle: www.wikipedia.org/wiki/magnetismus).

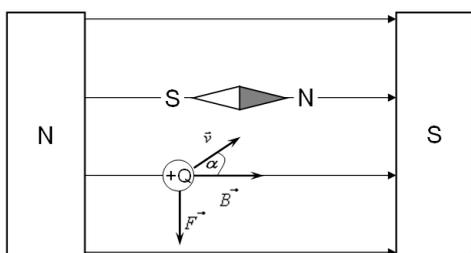
Personen:

Nikola Tesla (1856-1943) fasziniert durch zahlreiche praktische Erfindungen auf dem Gebiet der elektromagnetischen Energieübertragung, wie des Wechselstroms, des ersten Radiosenders und der ersten Fernsteuerung. Nach einer abgebrochenen Ausbildung an der Technischen Hochschule Graz entwickelte er die Idee, Wechselstrom zur Energieübertragung zu nutzen. Er ist der Miterfinder des heutigen Dreiphasensystems. Nach 1900 wurden seine Arbeiten allerdings immer skurriler, er kam auch zu der Überzeugung, mit Außerirdischen Kontakt gehabt zu haben und wollte diesen in Form „illuminierter Nachrichten“ mit Glühlampen beantworten.



Die Richtung von \vec{B} kann durch eine frei bewegliche Magnetnadel bestimmt werden. Sie ist gleich der Längsrichtung der sich im Magnetfeld ausgerichteten Magnetnadel von deren Südpol zum Nordpol (Abbildung). Der Betrag des Induktionsvektors wird aus der Kraft abgeleitet, die eine mit der Geschwindigkeit \vec{v} durch das Magnetfeld bewegte Ladung $+Q$ erfährt. Der Betrag dieser Kraft ist:

$$F = Q * v \cdot \sin \alpha$$



Der magnetische Fluss Φ hängt neben der Flussdichte noch von der betroffenen Fläche ab:

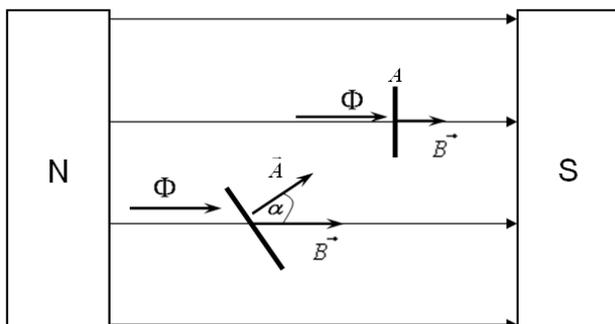
$$\Phi = \int_A \vec{B} * d\vec{A} \quad [\Phi] = \text{Vs}$$

Für konstante Flussdichte und senkrecht durchsetzte Fläche vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\Phi = B * A$$

Wird eine Fläche nicht senkrecht vom Magnetfeld durchsetzt, kann das Problem gelöst werden, indem nur die senkrecht durchsetzte Komponente der Fläche betrachtet wird:

$$\Phi = B * A * \cos \alpha$$



Der magnetische Fluss Φ ist eine skalare Größe.

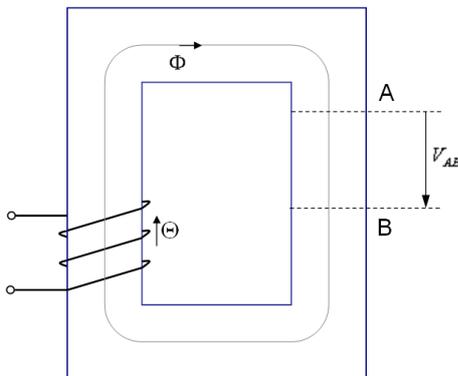
Magnetische Spannung, magnetischer Widerstand, Permeabilität

Ähnlich wie die elektrische Spannung tritt auch die magnetische Spannung in zwei Formen auf.

Die Durchflutung Θ (magnetomotorische Kraft) ist analog zur Quellenspannung U_l , diejenige Form, welche den magnetischen Fluss antreibt. Sie kann durch Dauermagnete oder durch elektrischen Strom erzeugt werden. Wird der Fluss durch elektrischen Strom hervorgerufen, so entspricht die Durchflutung der Summe der verketteten Ströme. Zum Aufbau von Magnetfeldern werden im allgemeinen Spulen mit einer Windungszahl N verwendet, es ergibt sich die zum Feldaufbau wirksame Durchflutung:

$$\Theta = \sum I_v = I * N \quad [\Theta] = 1A \text{ oder } [\Theta] = 1Aw \text{ (Amperewindung)}$$

Der magnetische Spannungsabfall V (in der Abbildung V_{AB} zwischen A und B) längs einer Strecke des magnetischen Kreises ist die zweite Form der magnetischen Spannung, sie entspricht dem elektrischen Spannungsabfall U .



In Übertragung des Maschensatzes auf den magnetischen Kreis gilt:

$$\sum_{k=1}^n V_k = \Theta$$

Die Summe der magnetischen Teilspannungen längs eines geschlossenen magnetischen Kreises ist gleich der Durchflutung, die mit dem Kreis verkoppelt ist.

Im Gegensatz zum elektrischen Stromkreis findet im magnetischen Kreis keine Teilchenbewegung statt. Es ist dennoch zweckmäßig, analog zum elektrischen, auch einen magnetischen Widerstand zu definieren. Die Beziehung für diesen Widerstand R_m lautet:

$$R_m = \frac{V}{\Phi} \quad [R_m] = 1 \frac{A}{Vs}$$

Wie auch der elektrische Widerstand ist der magnetische Widerstand von den geometrischen Abmessungen des (linienhaften) magnetischen Leiters und seinen Stoffeigenschaften abhängig, es gilt der Zusammenhang:

$$R_m = \frac{l}{\mu * A}$$

In dieser Gleichung stehen l für die Feldlinienlänge, A für die vom Fluss durchsetzte Querschnittsfläche und μ für eine Materialkonstante.

Diese wird als Permeabilität (lat.: permeare „durchlassen“) bezeichnet. Sie setzt sich, wie auch schon die Permittivität ε , in μ_0 (bezogen auf den Wert für das Vakuum) und die relative Permeabilität μ_r für die verschiedenen Stoffe zusammen.

Hinsichtlich ihres magnetischen Verhaltens unterscheidet man

- Magnetisch neutrale Stoffe $\mu_r = 1$ (z.B. Luft)
- Diamagnetische Stoffe $\mu_r < 1$, das Feld wird geringfügig geschwächt (z.B. Silber $\mu_r = 1 - 25 * 10^{-6}$; Wismut $\mu_r = 0,999831$)
- Paramagnetische Stoffe $\mu_r > 1$, das Feld wird geringfügig verstärkt (z.B. Platin $\mu_r = 1,00027$)
- Ferromagnetische Stoffe: $\mu_r \gg 1$, die verstärkende Wirkung ist sehr groß. Außerdem wird die Permeabilitätszahl eine nichtlineare Funktion der äußeren Feldstärke (z.B. Eisen bis $\mu_r = 7000$; $\mu_r \neq const$).

Für die magnetische Feldkonstante (Induktionskonstante) μ_0 gilt:

$$\mu_0 = 0,4\pi * 10^{-6} \frac{Vs}{Am} = 1,256 * 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$$

Zwischen μ_0 , ε_0 und der Lichtgeschwindigkeit c besteht der Zusammenhang:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

Magnetische Feldstärke

Analog zur elektrischen Feldstärke ergibt sich die magnetische Feldstärke \vec{H} als Quotient aus magnetischer Flussdichte und Permittivität:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad [H] = 1 \frac{A}{m}$$

Die magnetische Feldstärke ist ein Vektor, meist genügt es aber, ihren Betrag zu kennen:

$$H = \frac{B}{\mu}$$

Für den magnetischen Spannungsabfall folgt:

$$V = \int H dl \quad V_{AB} = \int_A^B H dl$$

5.1.3 Durchflutungsgesetz

Wird letztere Gleichung für einen geschlossenen Umlauf des magnetischen Kreises angewendet so ergibt sich:

$$\sum_1^n V_k = \sum \int H dl \quad \text{oder mathematisch exakt:} \quad \sum_1^n V_k = \oint H dl$$

Die Summe der magnetischen Spannungsabfälle entspricht der Durchflutung, wir erhalten das Durchflutungsgesetz:

$$\oint H dl = \Theta = \sum I$$

Das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke ist gleich der von diesem Umlauf erfassten Stromsumme.

Das Durchflutungsgesetz hat für die Berechnung magnetischer Kreise eine ähnlich große Bedeutung wie der Maschensatz für die Untersuchung elektrischer Stromkreise.

Zu beachten ist, dass durch das Durchflutungsgesetz eine Beziehung zwischen Strom und dem Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke beschrieben wird, nicht aber die Feldstärke selbst.

Beispiel:

Ein runder, langer, gerader Leiter wird von einem Strom $I = 120A$ durchflossen. Wie groß ist der Betrag der magnetischen Feldstärke im Abstand von $a = 50mm$ vom Leiter¹⁵?

Aus Symmetriegründen hat die magnetische Feldstärke auf konzentrischen Kreisen um den Leiter überall den gleichen Betrag. Daher wird ein Umlauf im Abstand $l = a = 50mm$ um den Leiter gewählt:

$$\oint H dl = H \oint dl = H * 2\pi * a = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi * a} = \frac{120A}{2\pi * 0,05m} = 381,9 \frac{A}{m}$$

Das Durchflutungsgesetz macht keine Aussage über die Feldstärke in einem Punkt des Umlaufs. Diese kann deshalb nur berechnet werden, wenn sie über den gesamten Integrationsweg (oder bekannte Teile) konstant ist!

Beispiel 2:

Berechnen Sie die Feldstärke im Inneren und außerhalb eines unendlich langen, geraden, gleichstromdurchflossenen Leiters mit Kreisquerschnitt (Radius R) mit über dem

Querschnitt gleichmäßig verteilter Stromdichte $J = \frac{I}{A}$!

¹⁵ Aufgabenstellung entnommen aus

http://www.fakultaet1.fh-hannover.de/fileadmin/media/doc/f1/tel/abschnitt_2.pdf

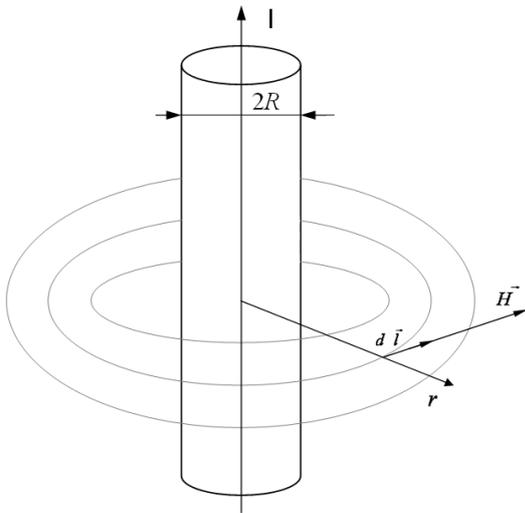


Abbildung 24: Magnetfeld um einen geraden Leiter

Fall 1 - Magnetfeld außerhalb des Leiters $r \geq R$:

Die Feldlinien bilden sowohl im Leiter als auch außerhalb des Leiters konzentrische Kreise. Wird der Umlauf entlang einer Feldlinie gelegt, ist die Feldstärke konstant und nur vom Abstand zur Leiterachse abhängig. Es wird deshalb zur Beschreibung der Feldstärke eine Radialkoordinate r eingeführt (Abbildung 24).

Außerhalb des Leiters ist die Summe der umfassten Ströme gleich dem Gesamtstrom, unabhängig von der Entfernung:

$$\Theta = \sum I = I$$

Das Umlaufintegral ergibt wieder den Kreisumfang, wir erhalten für den Verlauf der Feldstärke $H(r)$:

$$I = \oint H dl \quad \oint dl = 2\pi * r \quad H(r) = \frac{I}{2\pi * r}$$

$H(r)$ erreicht seinen Maximalwert für $r = R$ und nimmt von diesem hyperbolisch ab.

Fall 2 - Magnetfeld innerhalb des Leiters $r < R$:

Der Strom fließt laut Aufgabenstellung gleichmäßig im gesamten Leiter, deshalb wird jetzt nicht mehr der gesamte Strom sondern nur noch ein Teilstrom ΔI umfasst.

$$\Delta I = J * A = J * \pi r^2$$

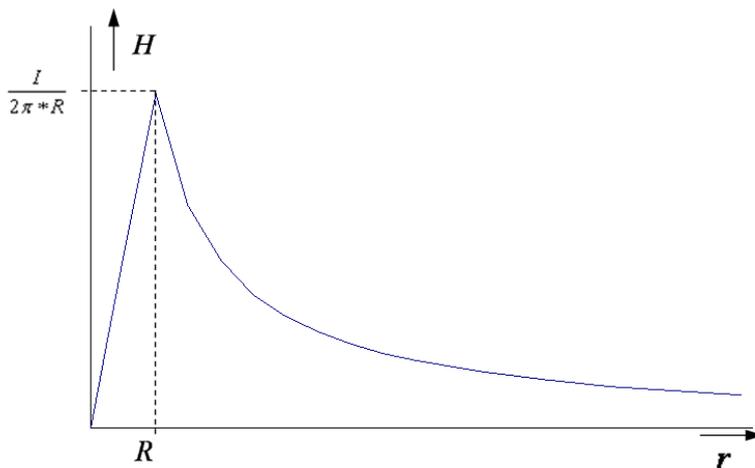
Dies ergibt für die Feldstärke im Inneren des Leiters:

$$H(r) = \frac{\Delta I}{2\pi * r} = \frac{J * \pi r^2}{2\pi * r} = \frac{J * r}{2}$$

Die Stromdichte ist konstant, damit ergibt sich schließlich

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{2\pi * R^2} \quad H(r) = \frac{I}{2\pi * R^2} * r$$

Das Diagramm zeigt den Verlauf der Feldstärke über r dargestellt. Der Verlauf gilt in jeder Richtung von der Leitermitte aus. Werte $r < 0$ sind nicht definiert.



s.a. Kindler/Haim [5] S. 145

Beispiel 3:

Berechnen Sie das Feld einer Zylinderspule, vereinfachend soll für das Verhältnis Durchmesser d zu Länge l gelten $l \gg d$.

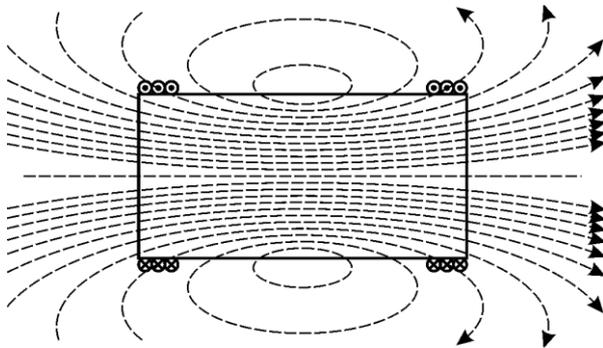


Abbildung 25: Feld einer Zylinderspule (Autor: W. Geißler 2011)

Wie aus der Abbildung 25 ersichtlich, ist der Abstand der Feldlinien im Innern der Spule näherungsweise konstant, außerhalb der Spule nimmt die Feldstärke schnell ab. Es gilt also für die beiden Feldstärken H_i im Inneren der Spule und H_a außerhalb $H_i \gg H_a$. Der Umlauf entlang einer Feldlinie ergibt die Stromsumme:

$$\sum I_v = I * N \quad (N = \text{Anzahl der Windungen})$$

Das Umlaufintegral zerlegen wir in zwei Linienintegrale für H_i und H_a :

$$\oint H * ds = \int_l H_i * dl + \int_{\text{ausßen}} H_a * ds_{\text{ausßen}}$$

Wegen $H_i \gg H_a$ vernachlässigen wir den Betrag für die äußere Feldstärke. Wir haben weiterhin angenommen, dass das Feld im Inneren der Spule homogen ist. Damit vereinfacht sich das Integral über der Spulenlänge:

$$H_i = \frac{I * N}{\int_l H_i * dl} \quad \int dl = l$$

$$H_i \approx H \approx \frac{I * N}{l}$$

5.1.4 Gesetz von Biot-Savart

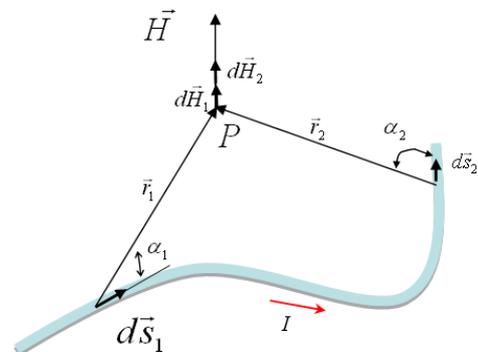
Das Gesetz von Biot-Savart gestattet die Berechnung der Feldstärke für einen Punkt außerhalb eines beliebigen „Stromfadens“:

$$H = \oint \frac{I(\vec{s} \times \vec{r})}{4\pi r^3}$$

Für ein differentielles Stück des Leiters gilt allgemein: $d\vec{H} = \frac{i(d\vec{s} \times \vec{r})}{4\pi * r^3}$ ¹⁶. Da nach der „rechten-Hand-Regel“ die Feldstärke senkrecht zum Strom steht, vereinfacht sich die Gleichung, wenn der Leiter in einer Ebene verläuft, zu:

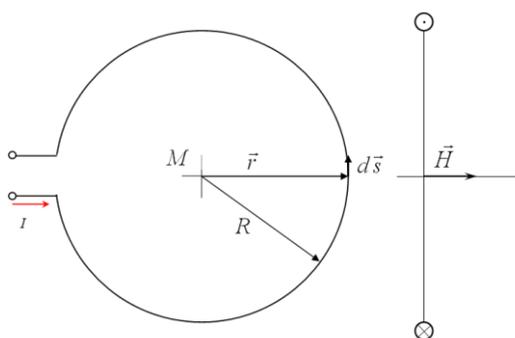
$$d\vec{s} \times \vec{r} = ds * r * \sin \alpha$$

$$H = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\sin \alpha}{r^2} * ds$$



Beispiel:

Berechnen Sie die magnetische Feldstärke in der Mitte einer kreisförmigen, stromdurchflossenen Leiterschleife! Radius der Schleife $R = 5\text{cm}$, $I = 10\text{A}$!



¹⁶ Das „ \times “ kennzeichnet das so genannte Kreuzprodukt, also das vektorielle Produkt aus $d\vec{s}$ und \vec{r}

Für die kreisrunde Leiterschleife ergeben sich folgende Vereinfachungen:

$$\alpha = \angle d\vec{s}, \vec{r} = 90^\circ \quad \sin \alpha = 1 \quad r = R$$

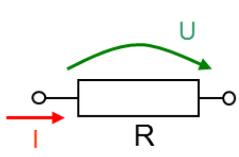
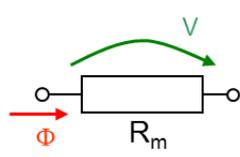
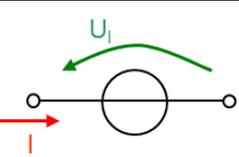
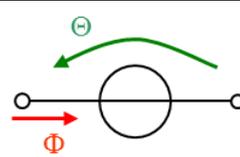
Damit gilt für das Gesetz von Biot-Savart:

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_s \frac{\sin \alpha}{r^2} * ds = \frac{I}{4\pi R^2} * \int_s ds = \frac{I}{4\pi R^2} * 2\pi R$$

$$H = \frac{I}{2R} = \frac{10A}{2 * 5cm} = 100 \frac{A}{m}$$

5.1.5 Berechnung magnetischer Felder und Kreise

Magnetische Kreise lassen sich in Analogie zu den elektrischen Kreisen mit magnetischen Widerständen, Spannungen und Flüssen berechnen (Tabelle¹⁷). Schwierigkeiten ergeben sich wegen der in der Regel nicht linearen Kennlinien für die Permeabilität der Magnetwerkstoffe.

Gleichstromkreis	Magnetischer Kreis
U	V
U_l	Θ
$R = \frac{l}{\chi * A} = \frac{U}{I}$	$R_m = \frac{l}{\mu * A} = \frac{V}{\Phi}$
	
	

¹⁷ Nach Herzig [3], S. 237

Magnetische Kreise finden ihre Anwendung z.B. in Transformatoren, Drosselspulen, Relais und Schützen sowie in elektrischen Maschinen. Der magnetische Kreis ist hier meistens aus gegeneinander isolierten Blechen (Elektroblech) hergestellt, u.a. um Wirbelstromverluste zu vermeiden. Da die Füllung des Kreises wegen der Blechung „unvollständig“ ist, führen wir

einen Füllfaktor $\varphi_{Fe} = \frac{A_{Fe}}{A}$ ein (A_{Fe} Fläche des Eisens, A vom Feld durchsetzte Fläche). In

der Praxis liegen die Füllfaktoren zwischen 85% und 96%

Beispiel:

Gegeben ist ein Magnetkreis entsprechend der Abbildung 26, das Magnetfeld im Kern wird als homogen angenommen. Der Kern besteht aus Elektroblech V400-50A, $\varphi_{Fe} = 0,95$,

$s_m = 28,5\text{cm}$, $A = 3,5\text{cm}^2$, die Spule hat $N = 737$ Windungen. Für die Induktion

von $B = 1,83\text{T}$ sind Durchflutung und Spulenstrom zu ermitteln. Ermitteln Sie weiterhin den magnetischen Widerstand des Eisenkreises!

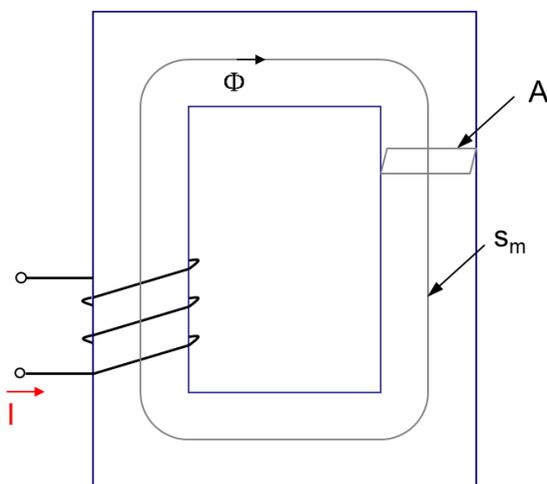
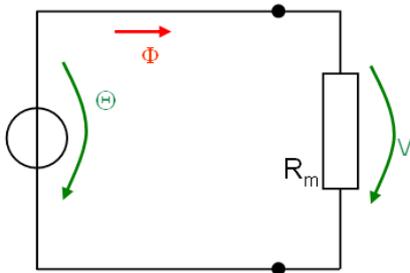


Abbildung 26: Magnetischer Kreis ohne Luftspalt

Der magnetische Kreis ist hier recht einfach aufgebaut, es gilt $\Theta = V$. Wegen der hohen magnetischen Leitfähigkeit des Eisens wird sich der magnetische Fluss im Wesentlichen im Magnetkern ausbreiten.



Der Zusammenhang zwischen Flussdichte und magnetischem Fluss ergibt sich über die durchflutete Fläche, wegen homogenem Feld und rechteckig durchsetzter Fläche gilt:

$$B = \frac{\Phi}{A} \quad \Phi = B * A * \varphi_{Fe} = \frac{1,83Vs * 3,5 * 10^{-4} m^2 * 0,95}{m^2} = \underline{4,59 * 10^{-4} Vs}$$

Für die Feldstärke gilt allgemein $H = \frac{B}{\mu}$, im gegebenen Fall ist die Permeabilität im ferro-

magnetischen Stoff aber nicht konstant. Die Magnetisierungskennlinie für die verschiedenen genormten Elektrobleche findet man in entsprechenden Tabellenbüchern, für unser Blech V400-50A gilt folgende Kennlinie (Abbildung 27):

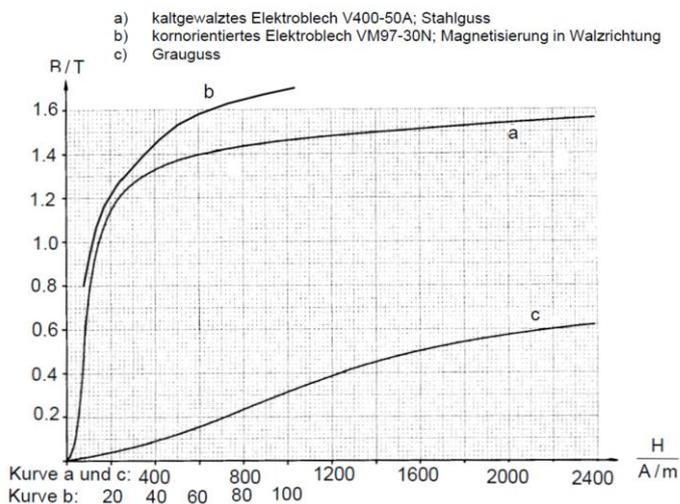


Abbildung 27: Magnetisierungskurven (Quelle: Herzig S. 229)

Wir ermitteln für $B = 1,38T$ einen Wert $H = 517 \frac{A}{m}$.

Für die Durchflutung im homogenen Feld gilt folglich:

$$\Theta = H * s_m = 517 \frac{A}{m} * 0,285m = \underline{147,3A}$$

mit $\Theta = I * N$ ergibt sich schließlich:

$$I = \frac{\Theta}{N} = \frac{147,3A}{737} = \underline{0,2A}$$

Für den magnetischen Widerstand des Eisenkreises ermitteln wir:

$$R_m = \frac{\Theta}{\Phi} = \frac{147,3A}{4,59 * 10^{-4}Vs} = \underline{3,2 * 10^5 \frac{A}{Vs}} = \underline{320 \frac{kA}{Vs}}$$

5.1.6 Kräfte im magnetischen Feld

Aus Erfahrung wissen wir, dass Magnete Eisenteile anziehen und anheben können, mit Hilfe des Magnetfeldes können also mechanische Kräfte erzeugt werden. Elektrische Maschinen basieren auf diesem Prinzip. Im Gegensatz zum elektrostatischen Feld werden keine Kräfte auf ruhende Ladungen ausgeübt. Wir können zwischen Kraftwirkungen auf bewegte Ladungen, stromdurchflossene Leiter und Trennflächen, das sind Flächen im magnetischen Kreis, an denen sich die Permeabilität ändert, unterscheiden.

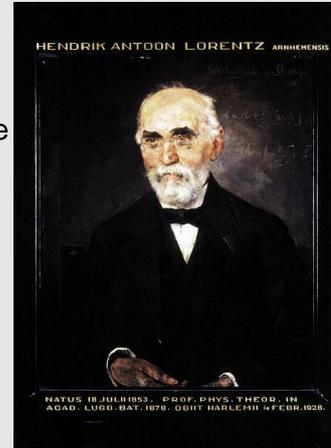
Kraftwirkung auf bewegte Ladungen

Bewegt sich eine Ladung Q mit der Geschwindigkeit \vec{v} in einem Feld mit der Flussdichte \vec{B} , so wird auf die Ladung die so genannte Lorentzkraft ausgeübt:

$$\vec{F} = Q * (\vec{v} \times \vec{B})$$

Personen:

Hendrik Antoon Lorentz (1853 bis 1928), Nobelpreisträger 1902, war ein niederländischer Mathematiker und Physiker. Er legte die mathematischen Grundlagen, auf denen Einsteins Relativitätstheorie aufgebaut ist. Lorentz gilt als führende Persönlichkeit der theoretischen Physik seiner Zeit, der die elektromagnetische Theorie des Lichtes sowie die Elektronentheorie der Materie entwickelte und auch eine widerspruchsfreie Theorie von Elektrizität, Magnetismus und Licht formulierte. Einstein sah in ihm eine Vaterfigur: „Ich bewundere diesem Mann wie keinen anderen, ich möchte sagen, ich liebe ihn.“



Die Kraft hat den Betrag:

$$F = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin \angle \vec{v}, \vec{B}$$

Die Richtung der Kraftwirkung wird durch das Kreuzprodukt bestimmt, das sich mit der „rechte-Hand-Regel“ veranschaulichen lässt (Abbildung 28). In unserem Fall zeigt der Daumen der rechten Hand die Richtung des Geschwindigkeitsvektors (Ursache), der Zeigefinger in Richtung der Feldlinien (Vermittler), der Mittelfinger in Richtung der Kraftwirkung (Wirkung). Da der Kraftvektor immer senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor ist, kann die Kraft im Gegensatz zur Kraftwirkung im elektrostatischen Feld nur ablenkend wirken, aber nicht geschwindigkeitsverändernd.

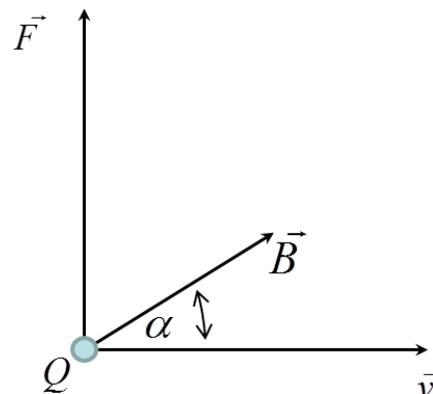
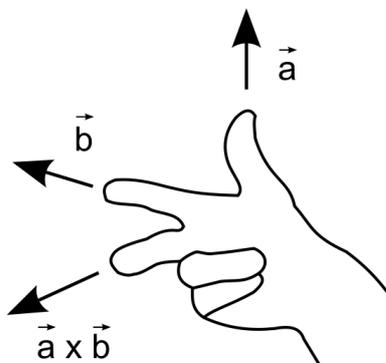


Abbildung 28: rechte-Hand-Regel

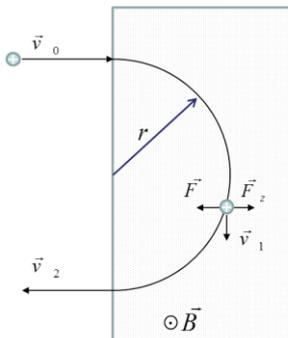
Je nach Winkel von \vec{v} und \vec{B} lassen sich drei Fälle unterscheiden¹⁸:

Richtung \vec{v} und \vec{B}	Resultierende Kraftwirkung
\vec{v} und \vec{B} richtungsgleich	$\vec{F} = 0$
\vec{v} und \vec{B} senkrecht zueinander	Ladung wird zu Kreisbahn abgelenkt, da \vec{F} immer radial wirkt
\vec{v} und \vec{B} in beliebigem Winkel	Ladung führt Schraubenbahn aus (Kreisbahn durch senkrechte Komponente, „Vorschub“ durch richtungsgleiche Komponente zu Geschwindigkeit)

Beispiel (Vorrunde 2007):

Die Energie von Alpha-Teilchen kann dadurch bestimmt werden, dass der Radius ihrer Kreisbahn in einem zeitlich konstanten und homogenen Magnetfeld der Flussdichte $B = 500\text{mT}$ gemessen wird. Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die kinetische Energie eines solchen Teilchens, bei dem der Bahnradius $r = 60\text{cm}$ beträgt!

Die Alpha-Teilchen werden im magnetischen Feld auf eine Kreisbahn gezwungen. Die dazu notwendige Radialkraft wird von der Lorentzkraft aufgebracht:



$$F = F_z$$

$$Q \cdot v \cdot B \cdot \sin 90^\circ = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad v = \frac{Q \cdot B \cdot r}{m}$$

¹⁸ S.a. Herzig [3], S. 250

Ein Alpha-Teilchen hat die Ladung $Q = 2e$ und die Masse $m = 2m_p + 2m_n$

($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \rightarrow$ Masse eines Protons, $m_n = 1,674 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \rightarrow$ Masse eines Neutrons)

$$v = \frac{2e \cdot B \cdot r}{2m_p + 2m_n} \qquad v = \frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5 \cdot 0,6 \text{ As} \cdot \text{Vs} \cdot m}{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot m^2}$$

$$v = 14,4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Für die Einheiten gilt:

$$\frac{1 \text{ As} \cdot \text{Vs} \cdot m}{1 \text{ kg} \cdot m^2} = \frac{1 \text{ Ws} \cdot s}{1 \text{ kg} \cdot m} = \frac{1 \text{ Nm} \cdot s \cdot s}{1 \text{ kg} \cdot m \cdot s} = \frac{1 \text{ kg} \cdot m \cdot s}{1 \text{ s}^2} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}}$$

Berechnung der kinetischen Energie:

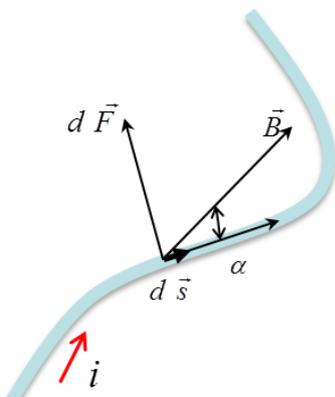
$$E = \frac{m}{2} \cdot v^2 \qquad E = \frac{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{2} \cdot \left(14,4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$

$$E = 6,93 \cdot 10^{-19} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = \underline{\underline{6,93 \cdot 10^{-19} \text{ J}}} \qquad \underline{\underline{E = 4,4 \text{ MeV}}}$$

Kraftwirkungen auf Ströme und stromdurchflossene Leiter

Auch die Kräfte auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld lassen sich aus der Lorentzkraft bestimmen, da der Stromfluss die Bewegung von Ladungen im Leiter ist.

Die Abbildung zeigt einen Leiter, in dem ein Strom i fließt. Das Magnetfeld hat im Punkt P des Leiters die Dichte \vec{B} . Auf das differentielle Leiterstück $d\vec{s}$ in P, in dem sich zur Zeit dt die Ladung dQ befindet, wirkt die Kraft $d\vec{F} = dQ \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$.



Es gilt $i = \frac{dQ}{dt}$ und $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$, damit folgt

$$d\vec{F} = dQ * \left(\frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{B} \right) = \frac{dQ}{dt} (d\vec{s} \times \vec{B}) = i * (d\vec{s} \times \vec{B})$$

Der Vektor des Wegelements $d\vec{s}$ ist richtungsgleich mit dem Strom (und damit \vec{v}). Für die Gesamtkraft \vec{F} gilt:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = i * \int d\vec{s} \times \vec{B}$$

Für einen geraden stromdurchflossenen Leiter der Länge s in einem längs des Leiters konstanten Magnetfeld der Dichte \vec{B} gilt:

$$\vec{F} = i \left(\int_s d\vec{s} \right) \times \vec{B} = i (\vec{s} \times \vec{B})$$

Beispiel:

Berechnen Sie die Kraft zwischen zwei parallelen, geraden, stromdurchflossenen Leitern (Abbildung 29).

Der vom Strom i_2 durchflossene Leiter erfährt im Magnetfeld der Flussdichte B_1 des vom Strom i_1 durchflossenen Leiters eine Kraft:

$$F_2 = i_2 * s * B_1 * \sin \alpha \quad \alpha = 90^\circ \quad \sin \alpha = 1$$

Für die Feldstärke außerhalb eines unendlich langen geraden Leiters hatten wir bereits ermittelt:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi * r}$$

Mit $B = \mu * H$ wird

$$B_1 = \mu_0 * H_1 = \frac{\mu_0 * i_1}{2\pi * a}$$

$$\vec{F} = i(\vec{s} \times \vec{B}) \quad F_2 = \frac{i_2 * (i_1 * \mu_0) * s}{2\pi * a}$$

Analog gilt für die Kraft F_1 :

$$F_1 = F_2 = \frac{i_2 * (i_1 * \mu_0) * s}{2\pi * a}$$

Die Richtung der Kräfte ergibt sich aus der Abbildung 29: Fließen die Ströme in entgegengesetzter Richtung, so stoßen sich die Leiter ab, bei Richtungsgleichheit erfolgt Anziehung.

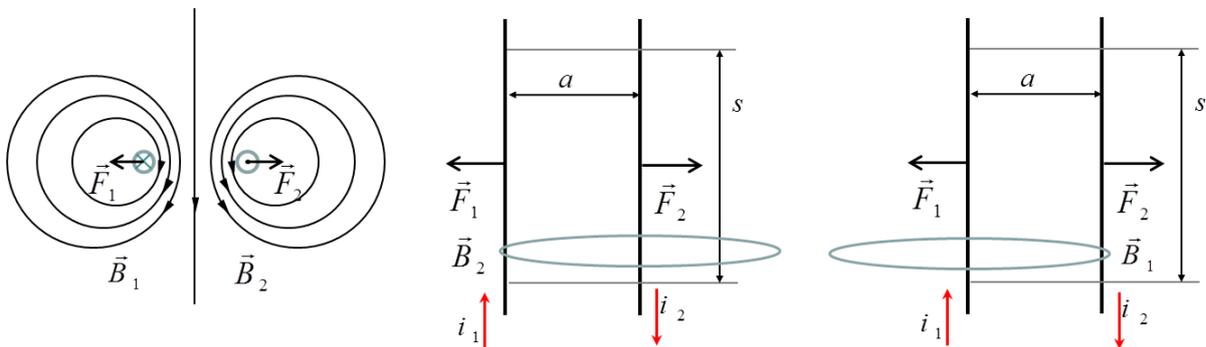


Abbildung 29: Kräfte zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern

Kräfte auf Trennflächen

Trennflächen im magnetischen Kreis sind Flächen, an denen sich die Permeabilität ändert (z.B. beim Übergang Eisen-Luft). Die Kräfte an den Trennflächen wirken unabhängig von der Feldrichtung immer senkrecht zur Trennfläche, ausgehend vom Medium mit der größeren Permeabilität μ_2 (Zugbeanspruchung) zum Medium mit der kleineren Permeabilität μ_1 (Druckbeanspruchung).

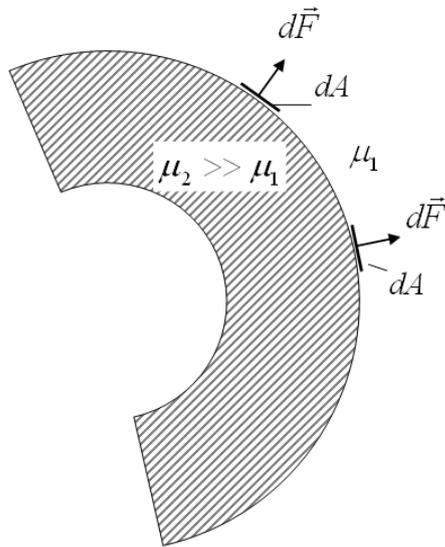


Abbildung 30: Kraftwirkung an der Grenzfläche zweier Medien

Wenn die Feldlinien senkrecht zur Grenzfläche stehen und $\mu_2 \gg \mu_1$ ist gilt:

$$\frac{dF}{dA} = \frac{H_1 \cdot B_1}{2} = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_1}$$

An der Trennfläche zwischen Eisen und Luft ($\mu_1 = \mu_0$) gilt bei homogenem Feld innerhalb der Fläche A:

$$F = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} * A = \frac{\Phi^2}{2 * \mu_0 * A}$$

Beispiel:

Magnetspannplatten halten metallische Werkstücke zur sicheren Bearbeitung. Berechnen Sie die die Spannkraft einer Magnetspannplatte bei einer Fläche von $A = 400\text{cm}^2$ und einer Induktion von $B = 0,7\text{T}$!

$$F = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} * A = \frac{0,7 * 0,7 * 4 * 10^{-2} \left(\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}\right)^2 * \text{m}^2}{2 * 1,257 * 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}} = 7995\text{N} \approx \underline{8000\text{N}}$$

5.1.7 Induktionsgesetz

Die elektromagnetische Induktion wurde 1831 von Michael Faraday entdeckt. Der Zusammenhang wird auch als das Faradaysche Induktionsgesetz bezeichnet und ist Teil der Maxwell'schen Gleichungen. Einfach formuliert lautet der Zusammenhang:

1. Jedes zeitlich veränderliche Magnetfeld wird von einem elektrischen Feld umwirbelt.
2. Eine bewegte Ladung erfährt im Magnetfeld eine Kraft.

In Differentialform lautet das Induktionsgesetz:

$$U_{ind} = \oint \vec{E} * d\vec{s} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} * d\vec{A}$$

Diese „universelle“ Gleichung werden wir zur Anwendung auf unsere einzelnen Aufgabenstellungen vereinfachen können.

Das durch die zeitliche Änderung des Magnetfeldes entstehende elektrische Feld übt Coulombsche Kräfte auf die frei beweglichen Ladungen in ruhenden Leitern aus. Es erfolgt eine örtliche Ladungstrennung im Leiter wodurch eine Potentialdifferenz und damit eine Spannung entsteht. Diesen Vorgang bezeichnen wir als **Ruheinduktion**. Wird ein Leiter durch ein Magnetfeld bewegt, so erfahren seine frei beweglichen Ladungsträger eine Kraft. Es erfolgt ebenfalls eine örtliche Ladungstrennung im Leiter, es entsteht eine Potentialdifferenz und damit eine Spannung. Diesen Vorgang nennen wir **Bewegungsinduktion**. In allen Fällen wird nur dann eine elektrische Spannung in den Leitern induziert, wenn die Leiter Flussänderungen ausgesetzt sind.

Die Wirkungsweise der elektrischen Generatoren und der Elektromotoren ohne die eine moderne Antriebstechnik nicht möglich wäre, beruht auf der Wirkung der Induktion. Diese wird durch das Induktionsgesetz beschrieben. Induktionserscheinungen sind weiterhin Ursache für Wirbelströme in massiven Eisenteilen bei Wechseltmagnetisierung und für die Stromverdrängung in Leitern, die von Wechselströmen durchflossen werden¹⁹.

¹⁹ S.a. Herzig [3], S. 260

Induktion durch Bewegung eines Leiters im magnetischen Feld

Wird ein Leiter im Magnetfeld bewegt, entsteht wegen Verschiebung der Ladungen eine Induktionsspannung zwischen den Leiterenden. Ursache hierfür ist die im Magnetfeld wirkende Lorentzkraft, die eine Ladungstrennung bewirkt. Aus dem Kräftegleichgewicht

$$\vec{F}_{Lorentz} = \vec{F}_{elektrisch} \text{ mit } \vec{F}_{Lorentz} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \text{ und } \vec{F}_{elektrisch} = \frac{U}{l} * Q \text{ gilt bei Bewegungsrichtung } \vec{v}$$

rechtwinklig zu \vec{B} für die induzierte Spannung:

$$U_{ind} = v * B * l$$

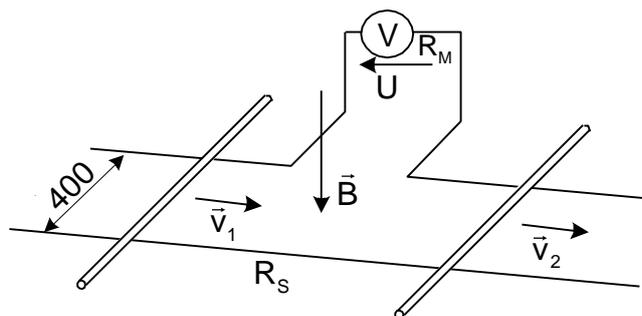
(l entspricht der vom Fluss durchsetzten Länge des Leiters).

Beispiel (Endrunde 2004):

Ein homogenes Magnetfeld $B = 0,1T$ steht senkrecht auf der Ebene zweier Schienen. Auf den Schienen bewegen sich in ständigem Kontakt mit den Schienen zwei Metallstäbe

(Schleifenwiderstand R_s) mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 0,2 \frac{m}{s}$ und $v_2 = 0,5 \frac{m}{s}$. Berechnen

Sie die Spannung U des Messinstrumentes wobei gilt: $R_M \gg R_s$!



Im magnetischen Feld bewegen sich zwei Leiter. Im bewegten Leiter mit der Geschwindigkeit v_1 wird die Spannung U_{ind1} induziert, im Leiter mit der Geschwindigkeit v_2 die Spannung U_{ind2} . Die Richtung der induzierten Spannungen ergibt sich über die rechte-Hand-Regel, da beide Leiter die gleiche Bewegungsrichtung haben, ergibt sich darüber hinaus auch die gleiche Richtung beider Spannungen.

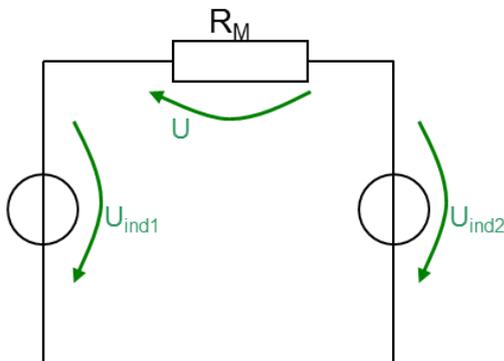
Da laut Aufgabenstellung der Widerstand der Schleife sehr viel kleiner ist als der des Messwerkes, vernachlässigen wir den Spannungsabfall über R_s . Damit gilt für den Maschensatz:

$$-U_{ind1} - U + U_{ind2} = 0 \qquad U = U_{ind2} - U_{ind1}$$

$$U_{ind1} = v_1 * B * l = 0,2 \frac{m}{s} * 0,1 \frac{Vs}{m^2} * 0,4m = \underline{8mV}$$

$$U_{ind2} = v_2 * B * l = 0,5 \frac{m}{s} * 0,1 \frac{Vs}{m^2} * 0,4m = \underline{20mV}$$

$$U = 20mV - 8mV = \underline{12mV}$$



Induktion bei ruhendem Leiter in zeitlich veränderlichem Feld

Induktionen treten nicht nur auf, wenn sich elektrische Leiter in einem Magnetfeld bewegen, sondern auch, wenn sich das magnetische Feld verändert. Diese Veränderungen können z.B. durch Ein- und Ausschalten eines den Fluss erzeugenden Gleichstroms, durch periodische Wechselspannungen oder durch Bewegen eines Dauermagneten erzeugt werden. Wir untersuchen eine offene Leiterschleife in einem zeitlich veränderbaren Magnetfeld (Abbildung 31)²⁰:

²⁰ S.a. Herzig,[3], S. 263

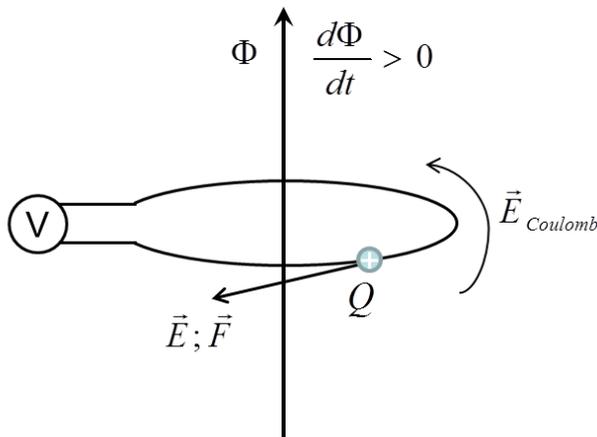


Abbildung 31: Offene Leiterschleife im zeitlich veränderbaren Magnetfeld

Das gleichzeitig mit dem magnetischen vorhandene elektrische Feld übt auf die positive Ladung eine Kraft \vec{F} aus:

$$\vec{F} = Q * \vec{E}$$

Es erfolgt Ladungstrennung, die an den Anschlüssen der Leiterschleife eine Spannung U_{ind} hervorruft. Die über der Schleife entstehende Coulombsche Feldstärke $\vec{E}_{Coulomb}$ ist entgegengesetzt zu der ladungstrennenden Feldstärke:

$$\vec{E} = -\vec{E}_{Coulomb}$$

Für die induzierte Spannung gilt:

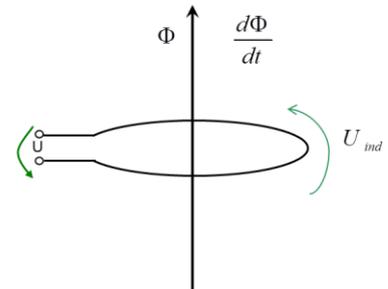
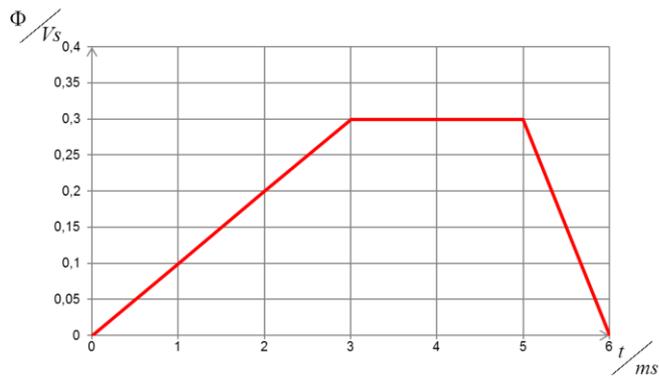
$$U_{ind} = \oint \vec{E} * d\vec{s} = -\oint \vec{E}_{Coulomb} * d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Werden statt einer Windung N Windungen einer Spule von der gleichen Flussänderung erfasst, so gilt analog:

$$U_{ind} = -\frac{N * d\Phi}{dt}$$

Beispiel:

Der mit einer Drahtschleife verkettete Fluss Φ hat den nebenstehend angegebenen zeitlichen Verlauf. Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der induzierten Spannung U_{ind} in der Schleife und stellen Sie diesen im Diagramm dar!



Wir erhalten über den Maschensatz:

$$U - U_{ind} = 0 \quad U = U_{ind} = \frac{d\Phi}{dt}$$

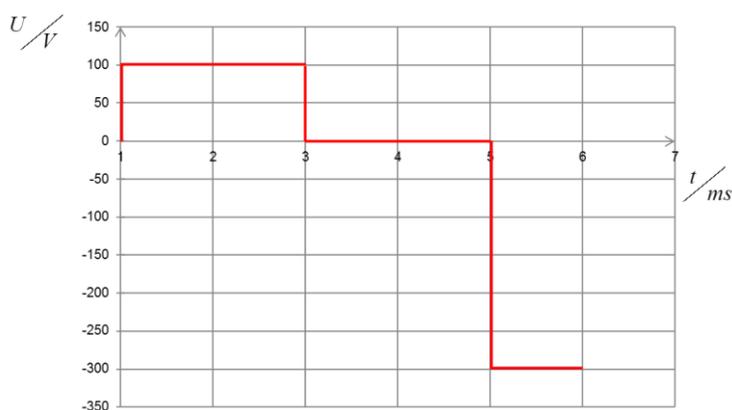
Es sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

$$0 \leq t \leq 3ms \quad U = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{0,3Vs}{0,003s} = \underline{100V}$$

$$0 \leq t \leq 3ms \quad U = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{0Vs}{0,002s} = \underline{0V}$$

$$0 \leq t \leq 3ms \quad U = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{-0,3Vs}{0,001s} = \underline{-300V}$$

Beachten Sie im letzten Fall das Minuszeichen!

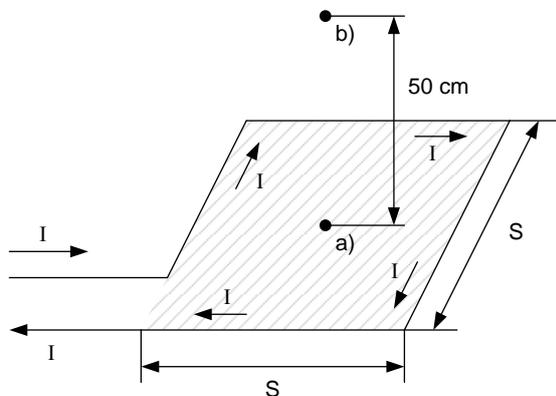


5.2 Übungsaufgaben

5.2.1 Aufgabe 1 (Endrunde 2010)

Ein Strom von $I = 1000\text{A}$ fließt durch eine quadratische Leiterschleife mit der Seitenlänge von $s = 1\text{m}$.

- Berechnen Sie die magnetische Feldstärke H und die magnetische Flussdichte B im Mittelpunkt der Schleife Punkt a)!
- Berechnen Sie H und B nochmals für einen Punkt b) der sich 50 cm über dem Punkt a) befindet!



Lösung a):

Zur Lösung der Aufgabe arbeiten wir mit dem Gesetz von Biot-Savart (Abschnitt 5.1.4):

$$H = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\sin \alpha}{r^2} * ds$$

Die quadratische Leiterschleife wird in 4 Leiterstücke der Länge s zerlegt, für ein Leiterstück gilt:

$$\alpha_1 = 45^\circ \quad \alpha_2 = 135^\circ$$

$$rd\alpha = ds * \sin \alpha \quad ds = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha}$$

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha}{r^2} * \frac{r * d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{r} = \frac{I}{4\pi * s/2} * \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha * d\alpha$$

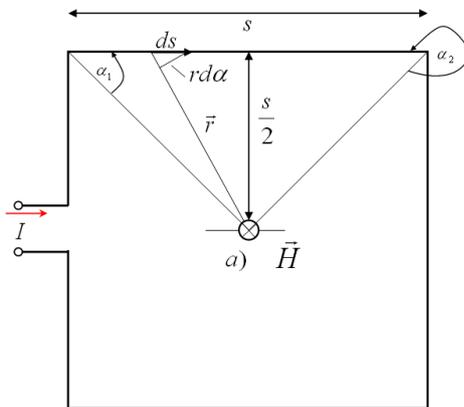
$$H = \frac{I}{4\pi * \frac{s}{2}} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

$$H = \frac{1000A}{4\pi * 0,5m} (0,707 + 0,707) = \underline{\underline{225 \frac{A}{m}}}$$

Damit ergibt sich für die Feldstärke im Punkt a):

$$\underline{\underline{H_a = 4H = 900 \frac{A}{m}}}$$

$$B_a = \mu_0 * H_a = 1,257 * 10^{-6} \frac{Vs}{Am} * 900 \frac{A}{m} = \underline{\underline{1,131mT}}$$



Lösung b):

Wir arbeiten mit der gleichen Formel für die Berechnung der 4 Teilfeldstärken, ermitteln aber zuvor die neuen Werte für den Radius r_b und die beiden Winkel α_{1b} und α_{2b}

$$r_b = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + (0,5m)^2} = \underline{\underline{0,707m}}$$

$$\tan \alpha_{1b} = \frac{2r_b}{s} \quad \alpha_{1b} = 54,73^\circ$$

$$\alpha_{2b} = 180^\circ - \alpha_{1b} \quad \alpha_{2b} = 125,26^\circ$$

$$H = \frac{1000A}{4\pi * 0,707m} (0,577 + 0,577) = \underline{\underline{129,8 \frac{A}{m}}}$$

Die Teilfeldstärken können nicht einfach aufsummiert werden, da sie jeweils im durch $\frac{s}{2}$ und der Höhe $h = 50\text{cm}$ gebildeten Winkel $\beta = 45^\circ$ wirken:

$$\underline{H_b = 4(H * \sin 45^\circ) = 4(129,8 \frac{\text{A}}{\text{m}} * 0,707) = 367 \frac{\text{A}}{\text{m}}}$$

$$B_b = \mu_0 * H_b = 1,257 * 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} * 367 \frac{\text{A}}{\text{m}} = \underline{0,461\text{mT}}$$

5.2.2 Aufgabe 2 (Endrunde 2004)

Durch einen rohrförmigen Leiter der Länge s mit den Radien $r_i = 1\text{cm}$ und $r_a = 2\text{cm}$ fließt der Gleichstrom $I = 100\text{A}$.

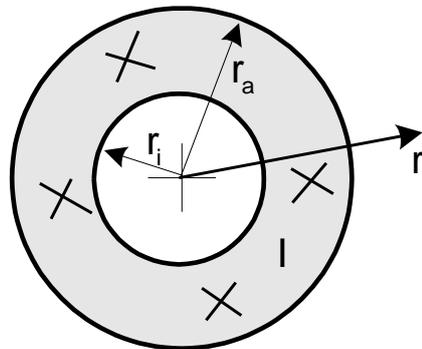
- a) Berechnen Sie die Funktion der magnetischen Feldstärke $H = f(r)$ für die Bereiche:

$$0 \leq r \leq r_i$$

$$r_i \leq r \leq r_a$$

$$r_a \leq r$$

- b) Berechnen Sie den Maximalwert der Feldstärke!
- c) Berechnen Sie den Radius r_1 , bei dem die Feldstärke außerhalb des Rohres 10% ihres Maximalwertes beträgt!

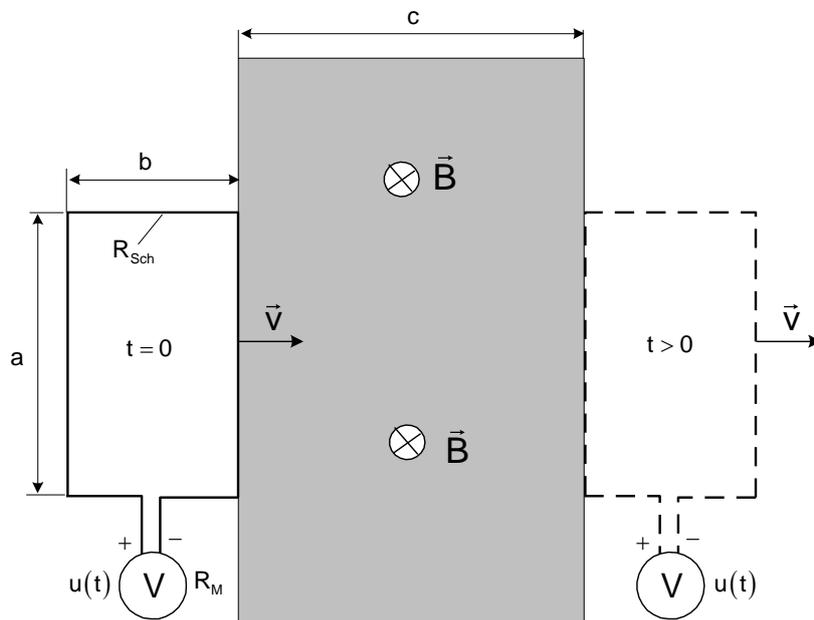


5.2.3 Aufgabe 3 (Endrunde 2005)

The wire-loop ($a = 50\text{mm}$, $b = 30\text{mm}$) is moved with a speed of $v = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ through the homogeneous magnetic field ($B = 1\text{T}$, $c = 60\text{mm}$).

Calculate the variation in time of the voltage $u(t)$, displayed on the voltmeter!

$$(R_M \gg R_{Sch})$$



5.3 Experimentelle Untersuchungen Kraftwirkungen in magnetischen Feldern

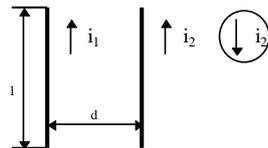
5.3.1 Versuchsziel

Kennenlernen der verschiedenen Arten von Kraftwirkungen in magnetischen Feldern

5.3.2 Versuchsvorbereitung

Berechnen Sie die Kraft, die auf die Leiter einer stromdurchflossenen, parallelen Leiteranordnung wirkt!

Diskutieren Sie die Kraftwirkung für gleich- und gegensinnige Stromrichtung in der Doppel-
leitung:



$$i_1 = i_2 = 100 \text{ mA}$$

$$d = 1 \text{ cm}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

5.3.3 Versuchsdurchführung

erforderliche Geräte:

- Modell einer elektrischen Maschine
- Eisenkreis mit Spule
- Eisenkern
- Stellgleichrichter 0 ... 250 V/ 0 ... 6 A (2 Stück)
- Strommesser 150 mA
- Spannungsmesser
- Stellwiderstand 17 Ω ; 6,5 A
- Waage mit Gewichten
- Federwaage (3 Newton)

Versuchsaufgaben:

An einem Modell einer elektrischen Maschine soll die Gültigkeit des Kraftgesetzes nachgewiesen werden.

Bei unterschiedlichen Strömen in der Läufer- und Erregerwicklung ist mittels Federwaage die am Läufer wirkende Kraft zu messen

$I_e = 100 \text{ mA}$: $I_1 = 25; 50; 75$ bzw. 100 mA

$I_e = 125 \text{ mA}$: $I_1 = 25; 50; 75$ bzw. 100 mA

$I_e = 150 \text{ mA}$: $I_1 = 25; 50; 75$ bzw. 100 mA

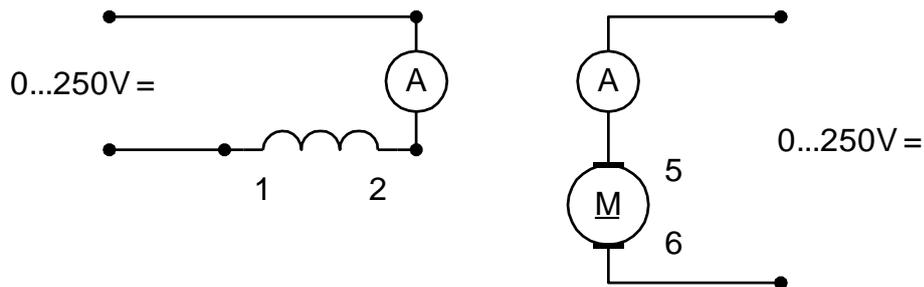


Abbildung 32: Schaltung 1 zum Versuch "Magnetfeld"

An einem Elektromagneten (Eisenkreis mit Spule) sind folgende Messungen durchzuführen:

1. Bei Wechselspannung ist der Strom durch die Spule in Abhängigkeit von der Spannung
 - a) bei angezogenem Anker ($\delta = 0$) und
 - b) bei einem Luftspalt der Länge $\delta = 5 \text{ mm}$ zu messen

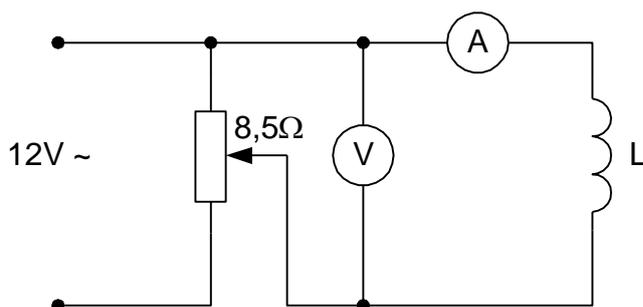


Abbildung 33: Schaltung 2 zum Versuch "Magnetfeld"

2. Für die Versuchsanordnung gemäß Schaltung 2 sind bei Einspeisung von 12 V Gleichspannung die Spannungen über der Spule des Elektromagneten bei den Strömen $1; 3$ und 6 A für die Luftspalte $\delta = 0; 5; 10; 20$ und 30 mm zu ermitteln.
3. Die Spule des Elektromagneten ist an 8 V Wechselspannung anzuschließen. Für die Luftspalte $\delta = 0; 5; 10; 20$ und 30 mm ist der Strom zu messen.

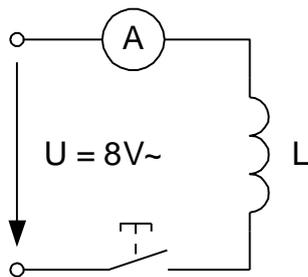


Abbildung 34: Schaltung 3 zum Versuch "Magnetfeld"

4. Unter Verwendung der Schaltung 3 sind für die Luftspalte $\delta = 10; 20$ und 30 mm die Anzugskräfte zu messen (Als Anzugskraft gilt der Wert, bei dem der Anker des Elektromagneten auf $\delta = 0$ gezogen wird; zum Anziehen des Ankers ist der Strom zuzuschalten.).
5. Die Spule des Elektromagneten ist an 4 V Gleichspannung (analog Schaltung 3) anzuschließen. Für die Luftspalte $\delta = 10; 20$ und 30 mm sind die Anzugskräfte zu ermitteln (Hinweise s. Pkt. 4)!

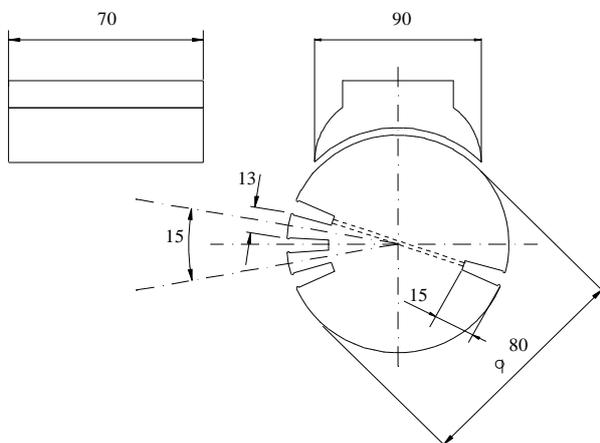
5.3.4 Versuchsauswertung

1. Berechnen Sie aus der im Versuch 1 ermittelten Kraft das wirksame Drehmoment. Ermitteln Sie daraus und aus den konstruktiven Daten des Modells der elektrischen Maschine in Verbindung mit den eingespeisten Läufer- und Erregerströmen die magnetische Flussdichte B .

Daten des Modells:

Hebellänge $l_H = 100$ mm

Windungszahl $N=900$



- Stellen Sie die Ergebnisse der Berechnungen in Tabellenform dar.
2. Stellen Sie die Ergebnisse der Versuche 1 und 2 in einem Diagramm $U=f(I)$ grafisch dar.
 3. Stellen Sie die Ergebnisse der Versuche 2 $U=f(\delta)$ und 3 $I=f(\delta)$ in einem Diagramm grafisch dar.
 4. Stellen Sie die Ergebnisse der Versuche 4 und 5 im Diagramm $F=f(\delta)$ grafisch dar.
 5. Diskutieren Sie die unter 1 bis 4 erhaltenen Versuchsergebnisse.

Anlage: Messprotokolle

1. Messung der am Läufer wirkenden Kraft in Abhängigkeit von der Gleichstromerregung bzw. dem Läuferstrom

$I_e = 100 \text{ mA}$	I/mA	25	50	75	100
	F/N				
	M/Nm				
	B/Vs/m ²				

$I_e = 125 \text{ mA}$	I/mA	25	50	75	100
	F/N				
	M/Nm				
	B/Vs/m ²				

$I_e = 150 \text{ mA}$	I/mA	25	50	75	100
	F/N				
	M/Nm				
	B/Vs/m ²				

2. $I = f(U)$ bei verschiedenen Luftspaltlängen

	$\delta = 0 \text{ mm}$ (angezogener Anker)	$\delta = 5 \text{ mm}$
U / V	I / A	I / A
12		
10		
8		
6		
4		
2		
0		

3. Messung der Spannung bei unterschiedlichen Luftspalten bei vorgegebenen Gleichströmen

	δ / mm				
	0	5	10	20	30
I / A	U / V				
1					
3					
6					

4. $I = f(\delta)$ bei $U_{\sim} = 8 \text{ V}$

U / V	δ / mm	I / A
8	0	
	5	
	10	
	20	
	30	

5. Kraftmessung bei angezogenem Anker und Gleichgewicht der magnetischen Waage bei Wechsel- bzw. Gleichspannung

	$U_q = 8 \text{ V} \sim$		$U_q = 4 \text{ V} -$	
δ / mm	m / g	F / N	m / g	F / N
10				
20				
30				

6 Literaturhinweise

- [1] Altmann, S: (2008). Lehr- und Übungsbuch Elektrotechnik. München. Hanser-Verlag
- [2] Elschner, H./Möschwitzer, A: Einführung in die Elektrotechnik-Elektronik.
Verlag Technik Berlin 1992
- [3] Herzig, B: Vorlesung „Grundlagen der Elektrotechnik“;
Hochschule Zittau/Görlitz (im Intranet verfügbar)
- [4] Kammerer, J. u.a.: Elektronik I Elektrotechnische Grundlagen der Elektronik.
Richard Pflaum Verlag München 1991
- [5] Kindler, H; Haim, K-D: Grundzusammenhänge der Elektrotechnik.
Vieweg Verlag Wiesbaden 2006
- [6] Lunze, K:Einführung in die Elektrotechnik; Lehrbuch. Verlag Technik Berlin, 1988
- [7] Lunze, K, Wagner K: Einführung in die Elektrotechnik; Arbeitsbuch.
Verlag Technik Berlin, 1987
- [8] Schrüfer, E: Elektrische Messtechnik. Carl Hanser Verlag München, 1992

7 Anhang A: Begriffsübersicht Deutsch – Englisch

D	En	PL/CZ
(elektrische) Arbeit W	(electrical) work	
Blindleistung Q	reactive power, idle power	
Drehmoment M	torque	
Durchflutung Θ	magnetomotive force	
(elektrische) Feldstärke E	electric field strength	
Flussdichte	flux density	
Induktivität L	inductance (als Bauelement: „inductor“)	
Kapazität C	capacitance (als Bauelement: “capacitor”)	
Leistung P	electrical power	
Leistungsfaktor $\cos \varphi$	power factor	
Leitwert G	(electrical) conductance	
Magnetflussdichte B	magnetic flux density	
Scheinleistung S	complex power, apparent power	
Strom I	(electrical) current	
Spannung U	(electrical) voltage	
Spule	Coil (inductor)	
Verschiebungsfluss Ψ	electrical flux	
(elektrische) Verschiebungsflussdichte D	electrical flux density	
Widerstand R	(electrical) resistance (als Bauelement: “resistor”)	
Wirkleistung P	real power, effective power	
Wirkungsgrad	efficiency	