Zahlenfolgen und Grenzwerte (Lösungen)

1. a) $a_1 = -4$
   b) $d = 2$ (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...)

2. a) a_{11}
   b) $q = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 18$

3. a) $a_0 = 3 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = 0 \quad a_4 = -\frac{1}{5}$

   $b_0 = -1 \quad b_1 = \frac{1}{2} \quad b_2 = -\frac{1}{3} \quad b_3 = \frac{1}{4} \quad b_4 = -\frac{1}{5}$

   $c_0 = 0 \quad c_1 = 1 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = -1 \quad c_4 = 0$

   b) $\{3 - 0{,}5\,k\} \quad \left\{\frac{1}{2^k}\right\} \quad \{10^{3-k}\}$ jeweils für k = 0, 1, 2, …

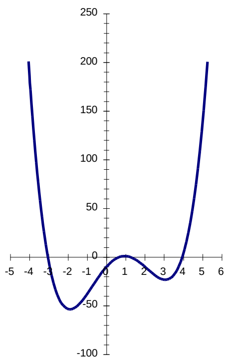
4. a) a = 0, n > 100 b) $a = \frac{1}{2}$, n > 50000

5. a) $a = -\frac{1}{2}$ b) $a = 0$ c) $a = \infty$ d) $a = \frac{3}{2}$ e) $a = \frac{1}{4}$ f) $a = \infty$

6. a) Nullstellen: $x_1 = -3$; $x_{2,3} = 1\,(\text{doppelt})$; $x_4 = 4$

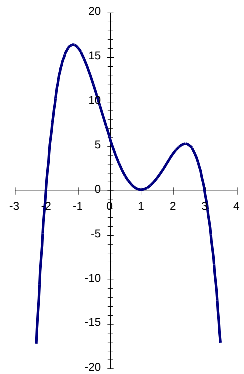
   Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y\,(0;-12)$

   $\lim\limits_{x\to\infty} (x^4 + ...) = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 + ...) = \infty$



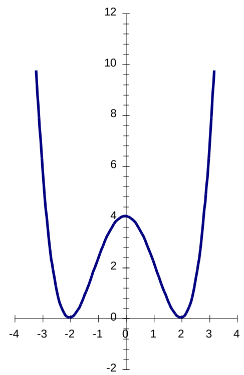
b) Nullstellen: $x_1 = -2$; $x_{2,3} = 1\,(\text{doppelt})$; $x_4 = 3$

$S_y\,(0;6)$; $\lim\limits_{x\to\infty} (-x^4 + ...) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^4 + ...) = -\infty$



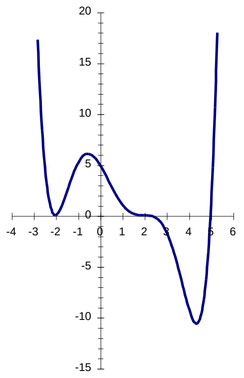
c) Nullstellen: $x_{1,2} = -2\,(\text{doppelt})$; $x_{3,4} = 2\,(\text{doppelt})$

$S_y\,(0;4)$; $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{4}x^4 + ...) = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{1}{4}x^4 + ...) = \infty$



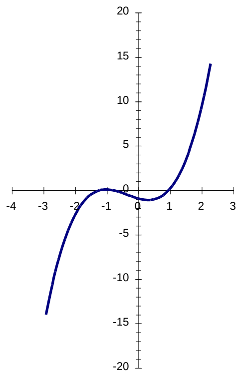
d) Nullstellen: $x_{1,2} = -2$ (doppelt); $x_{3,4,5} = 2$ (dreifach); $x_6 = 5$

$S_y(0;5)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{32}x^6+...\right)=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{32}x^6+...\right)=\infty$



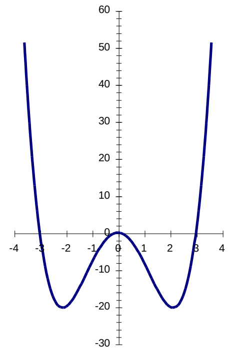
e) Nullstellen: $x_1 = 1$; $x_{2,3} = -1$ (doppelt)

$S_y(0;-1)$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+...)=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+...)=-\infty$



f) Nullstellen: $x_{1,2} = 0$ (doppelt); $x_3 = -3$; $x_4 = 3$

$S_y(0;0)$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4-9x^2)=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-9x^2)=\infty$

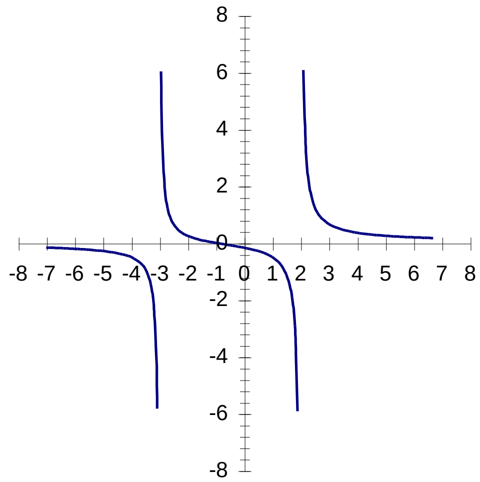


7. a) $S_y(0;-\frac{1}{6})$ $S_x(-1;0)$

Pole: $x_1=-3$ mit $\lim\limits_{x\to-3+0} y=\infty$ und $\lim\limits_{x\to-3-0} y=-\infty$

$x_2=2$ mit $\lim\limits_{x\to2+0} y=\infty$ und $\lim\limits_{x\to2-0} y=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} y=+0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-0$



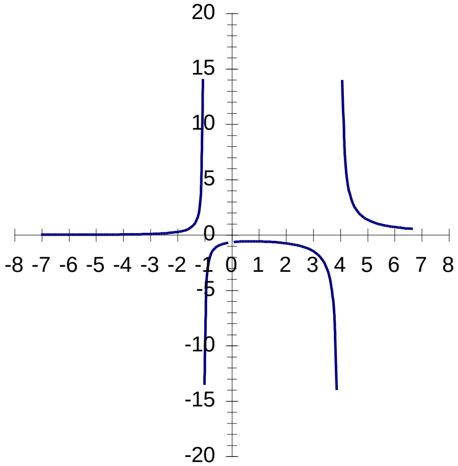
b) kein Schnittpunkt mit der y-Achse; $S_x(-3;0)$

$\text{Pole}: \ x_1 = -1 \text{ mit } \lim\limits_{x \to -1+0} y = -\infty \text{ und } \lim\limits_{x \to -1-0} y = \infty$

$x_2 = 4 \text{ mit } \lim\limits_{x \to 4+0} y = \infty \text{ und } \lim\limits_{x \to 4-0} y = -\infty$

$\text{Lücke}: \ (0; -\frac{3}{4})$

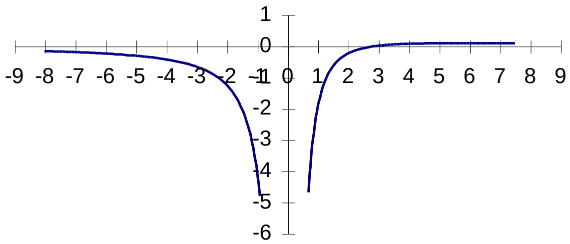
$\lim\limits_{x \to \infty} y = +0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} y = -0$



c) kein Schnittpunkt mit der y-Achse; $S_x(3;0)$

$\text{Pole}: \ x_{1,2} = 0 \text{ mit } \lim\limits_{x \to +0} y = -\infty \text{ und } \lim\limits_{x \to -0} y = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} y = +0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} y = -0$

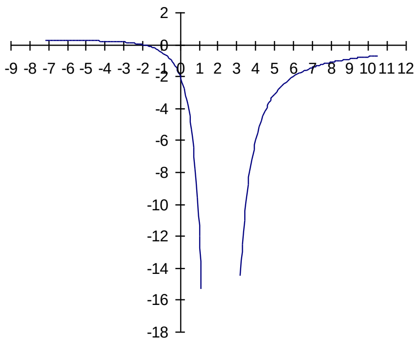


d) Funktion kann umgeformt werden in $y = \frac{-4(x+2)}{(x-2)^2}$

$S_y(0;-2) \quad S_x(-2;0)$

$\text{Pole}: \ x_{1,2} = 2 \text{ mit } \lim\limits_{x \to 2+0} y = -\infty \text{ und } \lim\limits_{x \to 2-0} y = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} y = -0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} y = +0$



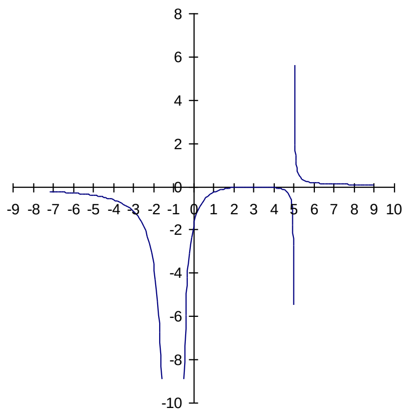
e) Funktion kann umgeformt werden in $y = \frac{(x-3)^2}{(x+1)^2(x-5)}$

$S_y(0;-\frac{9}{5}) \quad S_{x_{1,2}}(3;0)$

$\text{Pole}: \ x_{1,2} = -1 \text{ mit } \lim\limits_{x \to -1+0} y = -\infty \text{ und } \lim\limits_{x \to -1-0} y = -\infty$

$x_3 = 5 \text{ mit } \lim\limits_{x \to 5+0} y = \infty \text{ und } \lim\limits_{x \to 5-0} y = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} y = +0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} y = -0$

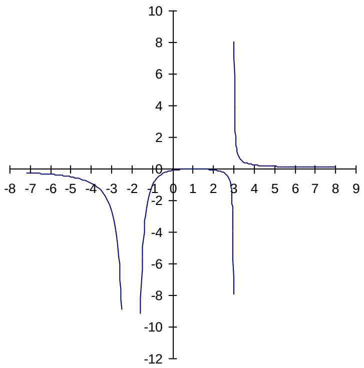


f) $S_y(0;-\frac{1}{12})$ $\quad S_{x_{1,2}}(1;0)$

Pole: $x_{1,2}=-2$ mit $\lim\limits_{x\to -2+0} y=-\infty$ und $\lim\limits_{x\to -2-0} y=-\infty$

$x_3=3$ mit $\lim\limits_{x\to 3+0} y=\infty$ und $\lim\limits_{x\to 3-0} y=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} y=+0;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} y=-0$



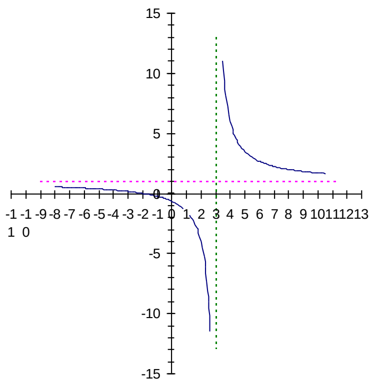
g) Funktion kann umgeformt werden in $y=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$

$S_y(0;-\frac{2}{3})\quad S_x(-2;0)$

Pol: $x=3$ mit $\lim\limits_{x\to 3+0} y=\infty$ und $\lim\limits_{x\to 3-0} y=-\infty$

Lücke: $(1;-\frac{3}{2})$

$\lim\limits_{x\to\infty} y=1+0;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} y=1-0$

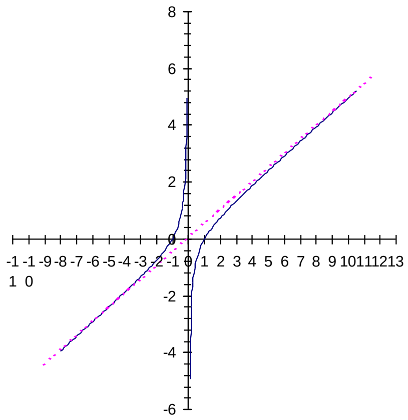


h) Funktion kann umgeformt werden in $y=\frac{(x+1)(x-1)}{2x}$

kein Schnittpunkt mit der y-Achse; $\quad S_{x_1}(-1;0)\quad S_{x_2}(1;0)$

Pol: $x=0$ mit $\lim\limits_{x\to +0} y=-\infty$ und $\lim\limits_{x\to -0} y=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$



i) Funktion kann umgeformt werden in $y=\frac{(x+2)(x-2)^2}{x^2}$

kein Schnittpunkt mit der y-Achse; $\quad S_{x_1}(-2;0)\quad S_{x_{2,3}}(2;0)$

Pole: $x_{1,2}=0$ mit $\lim\limits_{x\to +0} y=\infty$ und $\lim\limits_{x\to -0} y=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$