Differentialrechnung 1 (Definition, Regeln)

(Lösen Sie die Aufgaben ohne Taschenrechner !)

1. Berechnen Sie die 1. Ableitung nachstehender Funktionen an der Stelle x_0 mit Hilfe der Definition des Differentialquotienten !

   a) $y = f(x) = 3x^2 + 2$ b) $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ c) $y = f(x) = \sqrt{x}$

   d) $y = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ e) $y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

2. Veranschaulichen Sie den Anstieg (Tangente an die Kurve) und den Anstiegswinkel der folgenden Funktionen an den Stellen x = –2, 0 und 2 !

   a) $y = x^2$ b) $y = e^x$ c) $y = e^{-x}$

3. Bilden Sie von folgenden Funktionen y = f(x) die 1. Ableitung. Überlegen Sie, welche Differentiationsregeln anzuwenden sind.

   a) $y = -\dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \dfrac{1}{x} - 5$ b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \dfrac{1}{2}cx - 1$

   c) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \dfrac{1}{2}x^{-2} + 4$ d) $y = \left(ax^2 - b\right)^2$

   e) $y = \dfrac{x^2 + x}{3x^3}$ f) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}$

   g) $y = 4x + \dfrac{1}{x^2+1}$ h) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

   i) $y = \sin x \cdot \ln x$ j) $y = x^2 \ln x$

   k) $y = 10 \ln e \cdot \ln x$

4. Bilden Sie die 1., 2. und 3. Ableitung von

   a) $y = 5x^4 + \ln x + e^x$ b) $y = 2e^x - x^2$

5. Skizzieren Sie die Bilder von y´ und y´´ aus dem <u>Verlauf</u> der Funktion y = f(x) heraus (ohne y´ und y´´ analytisch zu bestimmen) !

   a) $y = f(x) = x^2$ b) $y = f(x) = \sin x$

6. Differenzieren Sie folgende Funktionen

   $$f(.) = x^2 z^x + 2z - y + 1$$

   nach der angegebenen unabhängigen Variablen.

   a) f(x) b) f(y) c) f(z)

7. Differenzieren Sie folgende Funktionen:

   a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ b) $y = \sqrt{1-2x}$

   c) $y = (\ln x)^2$ d) $y = \ln\sqrt{x}$

   e) $y = x^2 e^{\sqrt{x}}$ f) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

   g) $y = 5x^2 \sin 2x$ h) $y = \sin^2 x$

   i) $y = \ln(\tan x)$ j) $y = \ln(\ln x)$

   k) $y = \ln\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$ l) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a}\right)$