

## Zahlenfolgen und Grenzwerte

( Lösen Sie die Aufgaben ohne Taschenrechner ! )

1. a) Wie groß ist das Anfangsglied  $a_1$  einer arithmetischen Folge, deren 10. Glied  $a_{10} = 41$  und deren 13. Glied  $a_{13} = 56$  ist?  
 b) Zwischen je zwei Gliedern der arithmetischen Folge 2, 8, 14, 20, ... sind zwei Glieder so einzuschalten, dass eine neue arithmetische Folge entsteht. Wie groß ist die Differenz der neuen Folge?

2. a) Das wievielte Glied der geometrischen Folge  $\frac{625}{32}, \frac{125}{16}, \frac{25}{8}, \dots$  heißt

$$\frac{32}{15625}, \text{ wenn die Indizierung bei 1 beginnt?}$$

- b) Zwischen 2 und 54 sollen zwei Glieder so eingeschaltet werden, dass eine geometrische Folge entsteht. Wie lauten diese?

3. a) Geben Sie von den Folgen für  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$a_k = \left\{ \frac{3-k}{1+k} \right\} \quad b_k = \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right\} \quad c_k = \left\{ \sin \frac{k\pi}{2} \right\}$$

die ersten 5 Glieder an.

- b) Bestimmen Sie für die Folgen

$$3; 2,5; 2; 1,5; \dots \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad 1000, 100, 10, 1, \dots$$

das allgemeine Bildungsgesetz.

4. Berechnen Sie, falls er existiert, den Grenzwert  $a$  der Folge  $\{a_n\}$ . Wenn eine Folge einen Grenzwert hat, wird der Abstand  $|a_n - a|$  zwischen den Gliedern  $a_n$  der Folge und dem Grenzwert  $a$  immer kleiner. Bestimmen Sie, ab welchem

Glied  $|a_n - a| < 10^{-5}$  gilt.

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{n^2 \sqrt{n}}$$

$$\text{b) } a_n = \frac{n+1}{2n}$$

5. Berechnen Sie den Grenzwert  $a$  der Folgen

$$\text{a) } a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$$

$$\text{b) } b_k = \frac{4k-3}{2-5k+7k^2}$$

$$\text{c) } c_l = \frac{5l^2-6}{3l+4}$$

$$\text{d) } u_i = \frac{3i^3-2i^2+5i-6}{2i^3-4i^2-7i+9}$$

$$\text{e) } s_m = \left( \frac{3m-2}{3-6m} \right)^2$$

$$\text{f) } b_j = \frac{(2j-3)^2}{4j+1}$$

6. Man skizziere das Bild der ganzrationalen Funktionen  $y = f(x)$  mit Hilfe der Nullstellen, des Schnittpunktes mit der  $y$ -Achse und des Verhaltens von  $f(x)$  für betragsmäßig große  $x$ -Werte!

$$\text{a) } y = (x+3)(x-1)^2(x-4)$$

$$\text{b) } y = -(x+2)(x-1)^2(x-3)$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-2)^2$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{32}(x+2)^2(x-2)^3(x-5)$$

$$\text{e) } y = (x^2-1)(x+1)$$

$$\text{f) } y = x^4 - 9x^2$$

7. Skizzieren Sie das Bild der gebrochen rationalen Funktionen  $y = f(x)$  mit Hilfe der Achsenschnittpunkte, Pole, Lücken und des Verhaltens im Unendlichen!

$$\text{a) } y = \frac{x+1}{(x+3)(x-2)}$$

$$\text{b) } y = \frac{(x+3)x}{(x+1)(x-4)x}$$

$$\text{c) } y = \frac{x-3}{x^2}$$

$$\text{d) } y = \frac{-4x-8}{x^2-4x+4}$$

$$\text{e) } y = \frac{x^2-6x+9}{(x^2+2x+1)(x-5)}$$

$$\text{f) } y = \frac{(x-1)^2}{(x+2)^2(x-3)}$$

$$\text{g) } y = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$$

$$\text{h) } y = \frac{x^2-1}{2x}$$

$$\text{i) } y = \frac{(x^2-4)(x-2)}{x^2}$$